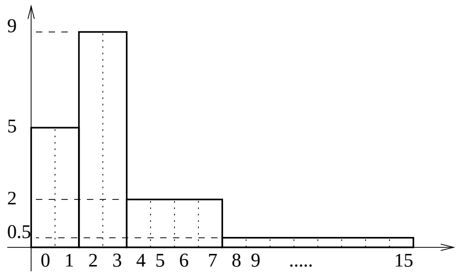
Module 01 (statistiques)

I Serge a eu les notes suivantes dans le trimestre: 7, 10 et 13 en DS, 15, 16 et 8 en DM et 19, 15 et 17 aux interrogations de cours. Les DM (devoirs à la maison) et les interrogations de cours ont pour coefficient 1/3 alors que les DS sont coefficient 1. Calculer sa moyenne trimestrielle sans utiliser de calculatrice.
(aide: de façon équivalente on peut dire que les DS ont le coefficient 3 et le reste coefficient 1, et une note coefficient 3 équivaut à trois notes identiques coefficient 1)

II Dans un lycée, on totalise le nombre de journées d'absence par élève de seconde et on obtient la répartition suivante :



Sur ce graphique, l'échelle verticale est arbitraire et ne correspond pas à un nombre d'élèves.

(a) Peut-on déterminer le nombre d'élèves de seconde de ce lycée.
(b) Donner le pourcentage d'élèves dans chaque colonne de l'histogramme (on dit qu'on calcule la fréquence de chacune des classes).
(c) Quel est le nombre moyen de jours d'absence d'un élève de seconde?
(d) Sachant qu'il y a eu 162 élèves absents 2 ou 3 jours, combien y a t'il délèves de seconde dans ce lycée?

III La puissance des ordinateurs actuels dépend largement du nombre de transistors (composant de base) dans le microprocesseur (le cerveau de l'ordinateur). Il y a quelques années, le microprocesseur 386 possédait 275000 transistors. Puis le 486 en contenait $1,2$ millions, le premier Pentium $3,3$ millions, le Pentium pro $5,5$ millions, le Pentium II $7,5$ millions et enfin le moins connu AMD-K6 en possède actuellement $8,8$ millions.
(a) Représenter le nombre de transistors pour chaque processeur dans un histogramme en prenant verticalement $1\,cm$ pour 1 million de transistors.

(b) Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre de transistors entre le 386 et le 486, entre le 486 et le Pentium I, entre le Pentium I et le Pentium pro, entre le Pentium pro et le Pentium II puis le Pentium II et le AMD-K6. Faire un histogramme avec ces pourcentages en prenant verticalement $2\,cm$ pour 100%.

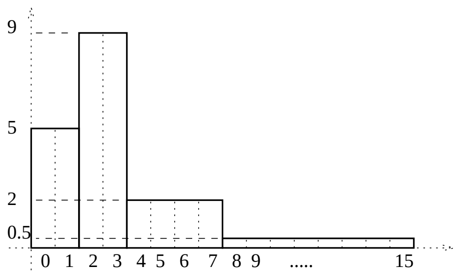
(c) Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre de transistors entre le Pentium pro et le AMD-K6, entre le 386 et le AMD-K6.

Module 01 (correction)

I La moyenne vaut:

$$\begin{aligned} m &= \frac{7+10+13+\frac{15}{3}+\frac{16}{3}+\frac{8}{3}+\frac{19}{3}+\frac{15}{3}+\frac{17}{3}}{1+1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \\ &= \frac{30+\frac{90}{3}}{1+1+1+\frac{6}{3}} \\ &= \frac{60}{5} = 12 \end{aligned}$$

II



(a) On ne peut pas déterminer le nombre total d'élèves de seconde car l'échelle verticale est arbitraire.

(b) Le nombre d'élèves dans la première colonne est proportionnel à l'aire de cette colonne qui vaut ici $2(jours) \times 5(hauteur) = 10$. L'aire de la deuxième colonne vaut $2(jours) \times 9(hauteur) = 18$, celle de la troisième $4(jours) \times 2(hauteur) = 8$ et enfin la quatrième $8(jours) \times 0.5(hauteur) = 4$. L'aire totale est donc $10+18+8+4 = 40$. La proportion d'élèves dans la première colonne est donc de $10/40 = 0.25$ soit 25% du total. Dans la deuxième colonne on a $18/40 = 0.45$ soit 45% du total, dans la troisième on a $8/40 = 0.2$ soit 20% du total et enfin on a $4/40 = 0.1$ soit 10% des élèves représentés dans la dernière colonne.

(c) La moyenne du nombre de jour d'absence se calcule de la façon suivante : on commence par prendre les milieux des intervalles correspondant à chaque colonne et on leur attribut un coefficient proportionnel à l'aire de la colonne. Par exemple, la première colonne comptabilise les élèves absents 0 ou 1 jour dans l'année. Le milieu de l'intervalle $[0;1]$ est donc 0.5. L'intervalle suivant va de 2 à 3 et le milieu est 2.5. Ensuite la troisième colonne part de 4 jusqu'à 7 jours, le milieu est donc 5.5 et la dernière colonne va de 8 à 15 qui ont pour milieu 11.5. La moyenne sera alors :

$$m = \frac{10 \times 0.5 + 18 \times 2.5 + 8 \times 5.5 + 4 \times 11.5}{10+18+8+4} = 3.5\ jours$$

(d) S'il y a eu 162 élèves absents 2 ou 3 jours, la deuxième colonne comptabilise donc 162 élèves. Or on a vu que cette colonne contient 45% du total des élèves. Donc le nombre total d'élèves vaut $165/0.45 = 360$.

III Il y a environ 336% d'augmentation entre le 386 et le 486 car:

$$\frac{1,2-0,275}{0,275} \simeq 3,36$$

Du 486 au Pentium I il y a eu environ 175% d'augmentation, du Pentium I au Pentium pro, 66%, du Pentium pro au Pentium II, 36% et enfin du Pentium II au AMD-K6 environ 17%.

Du Pentium pro au AMD-K6 il y a eu 60% d'augmentation et de l'époque du 386 au AMD-K6 actuel il y a eu environ 3100% d'augmentation! Le nombre de transistors a été multiplié par 32 en moins de 10 ans.

Module 02 (Statistiques)

I Moyennes

Marc a eu $12,5$ de moyenne sur les 8 premiers contrôles. Le 9^e contrôle sera le dernier du trimestre. Quelle est la moyenne maximale qu'il peut atteindre après ce 9^e contrôle?

II Moyennes et interprétation

Dans l'entreprise A, il y a 24 ingénieurs payés 400000F par an et 1 ouvrier payé 80000F par an. Dans l'entreprise B il y a 1 ingénieur payé 800000F par an et 24 ouvriers payés 160000F par an.

(a)Calculer le salaire moyen dans chaque entreprise.
(b)Dans quelle entreprise vaut il mieux travailler à votre avis?

III Interprétation de tableaux

Une enqueête en classe de terminale donne:

	1997 présentés	1997 reçus	1998 présentés	1998 reçus
non-redoublants	22	12	15	8
redoublants	3	3	10	9
total	25	15	25	17

Le proviseur : "En 1998 il y a eu une progression de la réussite au bac"
Le délégué des élèves : "Qu'on soit redoublant ou non, en 1998 ca a moins bien marché"
Qui a raison ?

IV Dispersion et écarts types

Un entrainneur hésite entre 2 nageurs, Patrick et Stéphane, pour représenter le club à la prochaine compétition de natation. Voici (en secondes) la liste de leurs 8 derniers temps:

P.	30,3	29,8	30	29,3	29,6	30,1	30,5	29,6
S.	30,1	29,8	30,1	29,8	30,2	29,9	30,1	30

(a) Calculer pour chacun leurs temps moyens et faire un histogramme de leur performances.
(b) Si l'entrainneur choisi celui qui a la meilleur moyenne, lequel choisira t'il? Et s'il sélectionne le plus régulier ? (Trouvez d'abord des critères de "régularité")

V Dispersion et écarts types

Au cours de l'année, Jérôme et Stéphane ont eu les notes suivantes en maths (toutes coefficient 1) :
Jérôme : 14/09/09/10/11/12/10/10/13/11/12/09/11/13/11
Stéphane : 10/14/17/20/09/09/03/16/10/08/06/06/17/06/14

(a)Calculer leur moyenne et comparer les.
(b)Faire les histogrammes des deux séries de notes
(c)Faire pour chaque histogramme un tableau à trois colonnes: dans la première inscrire la liste des notes. Dans la deuxième indiquer l'effectif correspondant à chaque note (lire dans l'histogramme), et dans la troisième colonne faire le calcul suivant $(note - moyenne)^2$ (par exemple si la premiere série à pour moyenne 11, on mettra dans cette colonne en face de la note 9 le nombre $(9-11)^2 = 2^2 = 4$.
(d)Faire pour chaque tableau la moyenne des valeurs de la troisième colonne. On notera V ces moyennes. Calculer $2\sqrt{V}$ pour chaque histogramme et comparer avec la "largeur" de chaque histogramme.

VI Interprétation de données

Dans chaque région, les agriculteurs consomment plus de pommes de terre que les non-agriculteurs, alors que pour l'ensemble de la France c'est le contraire. Expliquer ce "paradoxe" à l'aide des données suivantes:

Région 1 : 10 agriculteurs consomment chacun 130kg de pdt par an, 90 non-agriculteurs en consomment 120 kg.

Région 2 : 50 agriculteurs consomment chacun 90kg de pdt par an, 50 non-agriculteurs en consomment 80 kg.

Module 03 (Statistiques)

I On donne pour 3 années différentes le coût (en milliards de francs) de la politique de l'emploi en France :

	indemnisation du chômage	retraite anticipée	création d'emploi	formation	autres	total
1980	26,15	11,18	2,67	19,81	4,96	64,77
1985	56,37	58,03	8,02	37,03	9,91	169,39
1989	79,51	41,26	11,29	59,34	9,92	201,32

On demande de représenter ces nombres de 2 manières différentes :

(a) Faire un diagramme avec des barres verticales dont la hauteur correspond aux coûts indiqués dans le tableau. Pour chaque type de coût on représentera 3 barres côtes à côtes correspondant aux 3 années 1980, 1985 et 1989. On doit donc avoir dans ce diagramme 5 groupes de 3 barres verticales que l'on placera sur un même graphique. Attention, ce diagramme n'est pas un histogramme. Expliquez pourquoi.

(b) Faire un diagramme circulaire (camembert) pour chacune des 3 années considérées (faire 3 disques de même rayon côtes à côte pour pouvoir les comparer).

(c) Sur laquelle des deux représentations précédentes voit on le mieux que la part d'indemnisation du chômage a diminué de 1980 à 1985 puis réaugmenté en 1989 pour atteindre presque le niveau de 198O?

(d) Refaire les 3 diques précédents mais cette fois ci en s'arrangeant pur que les aires de ces disques soient proportionnels au coût total le la politique de l'emploi (dernière colonne du tableau).

II La société Fruitos annonce "Notre confiture contient 25% de fruits en plus que la moyenne des autres confitures du marché". Trouver comment Fruitos obtient ce pourcentage et commenter cette publicité sachant que la marque A contient 60% de fruits, les marques B,C,D et E en contiennent 15% et enfin Fruitos en contient 30%.

III On a réalisé 100 fois l'expérience suivante : on lance une pièce pour jouer à Pile ou Face. Si le résultat est Face on recommence jusqu'à obtenir Pile et on note le nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile. Et on répète donc cela 100 fois. On obtient les résultats suivants :

nb. de lancers pour avoir Pile	1	2	3	4	5	6	7
nb. d'expériences	53	24	11	6	3	2	1

Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

IV Retrouver les moyennes et les écarts types de Jérôme et de Stéphane (exercice V du module 02) en utilisant les fonctions statistiques de votre calculatrice. Commencer par trouver comment effacer la mémoire spécifique utilisée par les options statistiques, puis ensuite comment on rentre en mémoire une série de nombre et enfin sur quelles touches appuyer pour obtenir la moyenne et l'écart type.

Module 02 (Correction)

I La moyenne maximale de Marc sera obtenue s'il a 20 au dernier contrôle, et sa moyenne sur les 9 notes sera donc $\frac{8\times 12,5+20}{9} = 13,3$

II Un employé de l'entreprise A touche en moyenne 387000F alors que dans l'entreprise B la moyenne est de 185000F. Il est donc en apparence plus avantageux d'aller travailler dans A. Mais le salaire d'un ingénieur de B est plus grand que dans A, et le salaire d'un ouvrier est aussi plus grand dans B. Donc il vaut mieux malgré tout travailler dans B.

III Le proviseur parle de l'ensemble des élèves. Il y a eu $15/25 = 60\%$ de réussite en 97 et $17/25 = 68\%$ en 98 ce qui est donc un meilleur résultat. Si on distingue les redoublants des non-redoublants on constate qu'en 97 54% des non-redoublant obtiennent le bac contre 53% en 98, et pour les redoublants il y a eu 100% de réussite en 97 contre 90% en 98. Dans les 2 cas c'est moins bon en 98. Donc le proviseur comme le délégué élève ont raison. Ils ne parlent pas des mêmes catégories d'élèves et il est difficile de comparer 97 et 98 étant donné la très forte variation du nombre de redoublants.

IV La moyenne de Patrick est de 29,9s qui est meilleure que celle de Stéphane qui vaut 30s. Mais on constate sur l'histogramme de Patrick que les temps sont moins réguliers car les temps sont répartis sur un intervalle plus large que pour Stéphane.

V Jérôme et Stéphane ont tous les deux pour moyenne 11, mais l'un deux est plus régulier (Jérôme). Pour ce dernier on trouve $V \simeq 2,26$ et $\sigma \simeq 1,5$.
Pour Stéphane $V \simeq 23,6$ et $\sigma \simeq 4,9$. Attention au fait que pour calculer V (la variance) à partir du tableau il faut tenir compte des coefficients qui sont les effectifs notés dans la deuxième colonne. On constate que 2σ est une estimation correcte de la moitié de l'intervalle sur lequel sont réparties les notes.

DM 01 (Correction)

Exercice 24p158

La difficulté est ici que les classes correspondent à des intervalles. Comme le montre l'exemple de la page 153 du livre, on calcule moyenne et écart type en prenant pour série de nombre le centre de chaque intervalle. Ainsi pour l'intervalle $[0;2[$ on prendra 1, pour $[2;4[$ on prendra 3 etc...
L'effectif total vaut $14+16+...+13 = 100$. La moyenne vaut donc $(14\times 1+16\times 3+25\times 5+15\times 7+17\times 9+13\times 9)/100 = 5,88$

centre des intervalles	$(centre - moyenne)^2$	effectif
1	23,8144	14
3	8,2944	16
5	0,7744	25
7	1,2544	15
9	9,7344	17
11	26,2144	13

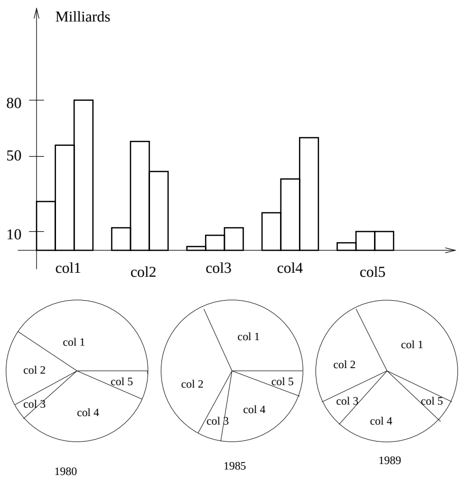
La variance vaut donc $(14 \times 23,8144 + ...)/100 = 10,1056$ et l'écart type vaut $\sigma = \sqrt{V} = 3,17893$.

Exercice II du module M03

La moyenne des proportions de fruits des confitures A, B, C, D et E vaut $\frac{60\%+15\%+15\%+15\%+15\%}{5} = 24\%$. La confiture Fruitos contient 30% de fruits ce qui par rapport aux 24% précédents constitue une augmentation de $\frac{30-24}{24} = 0,25$ soit 25% de plus. Fruitos a intérêt à se comparer à cette moyenne car on pourrait penser que si la moyenne des autres est de 24% c'est que la teneur en fruits de chaque marque est proche de 24%, mais ici les écarts sont très importants. Si Fruitos se comparait à la confiture A, la plus riche en fruits, la comparaison serait nettement moins en sa faveur.

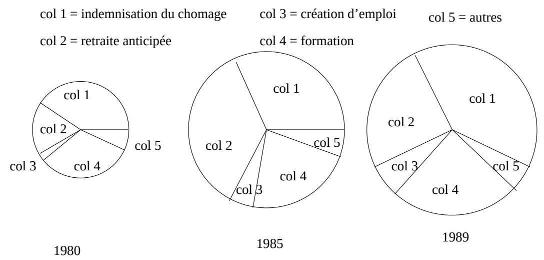
Module 03 (Correction)

I



Les proportions entres les différents types de coûts sont plus clairs sur les camemberts.

Pour obtenir des aires ($= \pi R^2$) proportionnelles au coût total il faut que le rayon R soit donc proportionnel à la racine carrée du coût, ce qui donne la figure suivante:



Exercice III du module M03

Chaque expérience consiste à faire des lancers Pile ou Face jusqu'à obtenir Pile. Si on obtient Pile du premier coup on met un tiret dans la colonne 1. Si c'est au deuxième coup on aurrait coché la deuxième colonne etc jusqu'à 7 (ca n'est jamais arrivé sur les 100 expériences effectuées qu'on ait a attendre au moins le 8^e coup). A la fin on compte le nombre de tirets dans la colonne 1 (on en trouve 53), en colonne 2 on en trouve 24 etc.
La moyenne demandée est le nombre moyen de coups qu'il faut attendre pour obtenir Pile. Cette moyenne vaut donc $\frac{53\times 1+24\times 2+...+1\times 7}{53+24+...+1} = 1,92$. Cela signifie qu'en moyenne on attend plutot le 2e coup (1,92 proche de 2) pour obtenir Pile mais ce n'est pas régulier et l'écart type s'obtient par le tableau suivant :

nb de coups	$(nb\ de\ coups - moyenne)^2$	effectif
1	0,8464	53
2	0,0064	24
3	1,1664	11
4	4,3264	6
5	9,4864	3
6	16,6464	2
7	25,8064	1

La moyenne des nombres de la deuxième colonne, pondérée par les coefficients (effectifs) de la troisième colonne donne la variance $V = (53 \times 0,8464 + ...)/(53 + 24 + ...) = 1,7136$.
La racine carrée de V donne $\sigma = 1,309$.
Commentaire supplémentaire : la moyenne étant de 1,92 , cet écart type signifie que si on refait ces experiences, environ les deux tiers des expériences donneront probablement un résultat compris entre $1,92 - 1,309 = 0,611$ et $1,92+1,309 = 3.229$, et comme en pratique le résultat est un entier, les 2/3 (environ) des résultats seront 1,2 ou 3. C'est à dire qu'on peut estimer que sur 100 expériences, de l'ordre de 70 vont donner Pile au troisième coup maximum (dans les expériences présentées il y en a eu 88 soit un peu plus que la "prédiction" statistique).

Module 04 (Calcul numérique et littéral)

I Calculer la somme des chiffres des nombres $a = 1975372$, $b = 3516894$ et $c = 2970413$
Dire pour chacun des trois nombres et sans utiliser la calculatrice s'il est divisible par 3 et s'il est divisible par 9. Enoncer la règle permettant de savoir si un nombre est divisible par 3 ou par 9.

II (a) Calculer la moyenne $\bar{X}$ puis la variance V_X de la série de nombres : 7;9;11. (sans utiliser les options statistiques de vos calculatrices).
(b) Calculer la moyenne M de la série de nombres ; 7^2; 9^2; 11^2. Calculer ensuite le nombre $M - (\bar{X})^2$ et comparer votre résultat avec V_X. On démontrera en calcul littéral que ce résultat n'est pas un hasard et qu'on peut toujours calculer la variance par la méthode exposée dans cette question (b).

III Calculez les expressions suivantes en donnant le résultat sous forme de fractions de nombres entiers les plus simples possibles :

- $E_1 = \frac{7^3}{7^5}$ $\qquad E_2 = \frac{\frac{5}{9}}{15}$ $\qquad E_3 = \frac{\frac{-75}{16}}{\frac{2}{-45}}$
- $E_4 = \frac{\frac{3}{15} - \frac{11}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{6}{4}}$ $\qquad E_5 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

IV Mettre les expressions suivantes sous la forme $A + B\sqrt{2}$ où A et B sont des nombres entiers ou des fractions de nombres entiers (par exemple $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ s'écrira $2 + \sqrt{2}$).

1. $E_1 = (7\sqrt{2})^3$
2. $E_2 = 4\sqrt{2} + 5(\sqrt{2})^4 + \sqrt{2}^3$
3. $E_3 = (1 + \sqrt{2})^2$
4. $E_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

V (a) Démontrer que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ (sans la calculatrice bien entendu).
(b) En s'aidant du résultat du (a) écrire l'expression $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ sous la forme $A + B\sqrt{3}$ où A et B sont des nombres entiers ou des fractions de nombres entiers.

VI Mettre les expressions suivantes sous la forme $A + B\sqrt{5}$ où A et B sont des nombres entiers ou des fractions de nombres entiers

1. $E_1 = (3 + \sqrt{5})^2 - (3 - \sqrt{5})^2$ (faire le calcul de deux manières différentes).
2. $E_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-3}$ (on s'aidera éventuellement de l'exercice V)

VII Calcul d'ordres de grandeurs

Dans un médicament, le produit actif contre la maladie est mélangé à un produit neutre (appelé "excipient"). La proportion de produit actif dans l'excipient est souvent faible. En homéopathie, on mesure cette proportion en CH. Une proportion de 1CH correspond à une fraction de $0,01$ (un centième). Pour avoir une dilution à 2CH, on prend le produit déjà dilué à 1CH et on le redilue au centième.
(a) Quelle est la proportion de produit actif dans un comprimé à 2CH?
(b) Ecrire sous forme d'une puissance de 10 la proportion de produit actif dans un comprimé à 15CH puis pour un comprimé à 20CH?
(c) Sachant qu'un tube homéopatique renferme de l'ordre de 10^{24} molécules au total, quel est le nombre de molécules de produit actif dans le tube?
(d) Combien faut il consommé de tubes homéopathiques pour être pratiquement sûr d'avoir mangé au moins une molécule de produit actif?

Module 04 (Correction)

I Un nombre entier est un multiple de 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Idem pour 9.
II (a) la moyenne de 7; 9 et 11 vaut $\bar{X} = 9$. La variance vaut donc $V = \left((7-9)^2 + (9-9)^2 + (11-9)^2\right)/3 = 8/3$.
(b) $M - (\bar{X})^2 = \left(7^2 + 9^2 + 11^2\right)/3 - 81 = 8/3$

III Calculez les expressions suivantes en donnant le résultat sous forme de fractions de nombres entiers les plus simples possibles :

- $E_1 = \frac{1}{7^2}$ $\qquad E_2 = \frac{1}{27}$ $\qquad E_3 = \frac{75 \times 45}{16 \times 2} = \frac{5^3 3^3}{2^5}$
- $E_4 = \frac{\frac{1}{5} - \frac{11}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{-10}{5}}{\frac{4}{2}} = \frac{-2}{2} = -1$
- $E_5 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}$

IV Mettre les expressions suivantes sous la forme $A + B\sqrt{2}$ où A et B sont des nombres entiers ou des fractions de nombres entiers (par exemple $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ s'écrira $2 + \sqrt{2}$).

1. $E_1 = 7^2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times 7^2 \times \sqrt{2}$ (ici $A = 0$, $B = 2 \times 7^3$)
2. $E_2 = 4\sqrt{2} + 5 \times 2 \times 2 + 2\sqrt{2} = 20 + 6\sqrt{2}$ (ici $A = 20$, $B = 6$)
3. $E_3 = 1 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$ (ici $A = 3$ et $B = 2$)
4. $E_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (ici $A = 0$ et $B = -1/2$)

V (a) Les produits en croix donnent $1 \times 1 = 1$ et $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$. Ils sont égaux ce qui prouve que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$. (b) $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Donc on a dans ce cas $A = 1/2$ et $B = 1/2$.

VI Mettre les expressions suivantes sous la forme $A + B\sqrt{5}$ où A et B sont des nombres entiers ou des fractions de nombres entiers

1. $E_1 = 12\sqrt{5}$
2. $E_2 = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)} = \frac{\sqrt{5}^2 + 4\sqrt{5} + 3}{5-9} = \frac{8+4\sqrt{5}}{-4} = -2 - \sqrt{5}$ (ici $A = -2$, $B = -1$)

VII Calcul d'ordres de grandeurs

(a) Dans un comprimé à 1CH il y a un centième de produit actif. Dans un comprimé à 2CH il y a un centième de produit à 1CH. Il y a donc un centième de un centième de produit actif, soit $0,01 \times 0,01 = 10^{-4}$ (un dimillième).
(b) à 15CH la proportion de produit actif est $(0,01)^{15} = (10^{-2})^{15} = 10^{-30}$. A 20CH on a donc une proportion de 10^{-40}.
(c) Le nombre total de molécules actives est égal au produit du nombre total de molécules dans le médicament multiplié par la proportion de produits actif soit pour un comprimé à 20CH $10^{24} \times 10^{-40} = 10^{-16}$ molécules (moins que 1 !).
(d) Pour être à peut près sûr d'avaler 1 molécule de produit actif il faut N tubes contenant 10^{-16} molécule(s). On doit donc avoir $N \times 10^{-16} = 1$ molécule. Soit $N = 10^{16}$. Il faut donc avaler 10 millions de milliards de tubes pour avoir une petite chance d'avoir avalé au moins 1 molécule de produit actif. Remarques : en théorie homéopathique, les médiacaments les plus efficaces sont dilués entre 20CH et 40CH.

Module 05 (Calcul numérique et littéral)

I Ecrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

- $E_1 = 5(3-2(x-5)) - 2(1-2x)(5-x)$
- $E_2 = 2(x-2y+3) - (5x-4)\left(y+\frac{3}{2}\right)$
- $E_3 = (2x+1)^2 - (1+x)^2$
- $E_4 = (2x+1)^2 + (x+2)(1-3x) - (1-x)^2$ (deux méthodes possibles : on peut commencer par développer ou on peut factoriser en plusieurs étapes)

II (1) Developper l'expression $E_1 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
(2) Développer l'expression $E_2 = (a^2-b^2)(a+b) - E_1$ (on prendra pour E_1 le résultat du (1)). Simplifier le plus possible votre résultat puis factorisez le.

III On considère une série de N nombres T_1, T_2,... et T_N chacun avec le coefficient 1. la moyenne, notée $\bar{T}$ vaut $(T_1 + ... + T_N)/N$. Pour obtenir la variance on calcule les nombres $a_1 = (T_1-\bar{T})^2$,..., $a_N = (T_N-\bar{T})^2$.
(a) Développer a_1.
(b) On note M la moyenne des nombres T_1^2, T_2^2, T_3^2,... ,T_N^2. Ecrire la formule donnant M.
(c) A partir du calcul du (a) calculer la variance V en ne faisant intervenir que $\bar{T}$ et M.

IV (Exercice de type Module : décodage de phrases)
Les phrases suivantes correspondent à un calcul. Ecrire pour chaque phrase le calcul correspondant et effectuez ce calcul.

1. Le cinquième du carré de 10.
2. L'opposé des trois quarts de six.
3. L'opposé de la somme de deux tiers et de un demi.
4. La somme de l'inverse du double de 5 et des deux cinquièmes de 3.
5. Le produit du tier de 25 par le triple de quatre cinquièmes
6. La différence de 5 avec le triple de cinq sixièmes.
7. L'inverse du quadruple de trois demis.
8. Le triple de la somme de 7 et du sixième de 5.
9. La racine carrée de la somme de 8 et de l'inverse de 3
10. Le produit de l'inverse de cinq quarts par la moitié de 25

Module 05 (Correction)

I

- $E_1 = 55 + 12x - 4x^2$
- $E_2 = 12 - 5xy - \frac{11}{2}$
- $E_3 = ((2x+1)-(x+1))((2x+1)+(x+1))$
  $= x(3x+2)$
- $E_4 = x+2$

II (1) $E_1 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$.
(2) $E_2 = (a^2-b^2)(a+b) - E_1 = a^3 + a^2b - b^2a - b^3 - (a^3-b^3) = a^2b - b^2a = ab(a-b)$

III On considère une série de N nombres T_1, T_2,... et T_N chacun avec le coefficient 1. la moyenne, notée $\bar{T}$ vaut $(T_1 + ... + T_N)/N$. Pour obtenir la variance on calcule les nombres $a_1 = (T_1-\bar{T})^2$,..., $a_N = (T_N-\bar{T})^2$.
(a) $a_1 = T_1^2 - 2\bar{T}T_1 + \bar{T}^2$.
(b) $M = (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + ... + T_N^2)/N$
(c) Par définition, V est la moyenne des nombres a_1, ... a_N, donc on a :

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{a_1 + ... + a_N}{N} \\
&= \frac{T_1^2 - 2\bar{T}T_1 + \bar{T}^2 + ... + T_N^2 - 2\bar{T}T_N + \bar{T}^2}{N} \\
&= \frac{\left(T_1^2 + ... + T_N^2\right) - 2\bar{T}(T_1 + ... + T_N) + \left(\bar{T}^2 + ... + \bar{T}^2\right)}{N} \\
&= \frac{T_1^2 + ... + T_N^2}{N} - 2\bar{T}\frac{T_1 + ... + T_N}{N} + \frac{N \times \bar{T}^2}{N} \\
&= M - 2\bar{T} \times \bar{T} + 1 \times \bar{T}^2 \\
&= M - 2\bar{T}^2 + \bar{T}^2 \\
&= M - \bar{T}^2
\end{aligned}
$$

Cette dernière formule est celle qui a été appliquée à l'exercice II du module 04.

IV

1. Le cinquième du carré de 10 $= \frac{10^2}{5} = 20$
2. L'opposé des trois quarts de six $= -\frac{3}{4} \times 6 = -\frac{9}{2}$
3. L'opposé de la somme de deux tiers et de un demi $= -\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = -7/6$
4. La somme de l'inverse du double de 5 et des deux cinquièmes de 3 $= \frac{1}{2\times 5} + \frac{2}{5} \times 3 = 13/10$
5. Le produit du tier de 25 par le triple de quatre cinquièmes $= \frac{25}{3} \times (3 \times \frac{4}{5} = 20$
6. La différence de 5 avec le triple de cinq sixièmes $= 5 - 3 \times \frac{5}{6} = 5/2$
7. L'inverse du quadruple de trois demis $= \frac{1}{4\times\frac{3}{2}} = 1/6$
8. Le triple de la somme de 7 et du sixième de 5 $= 3 \times (7 + 5/6) = 47/2$
9. La racine carrée de la somme de 8 et de l'inverse de 3 $= \sqrt{8+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$
10. Le produit de l'inverse de cinq quarts par la moitié de 25 $= \frac{1}{\frac{5}{4}} \times \frac{25}{2} = 10$

Module 06 (Calcul numérique et littéral)

I La notation scientifique :

Par convention, la notation scientifique consiste à re-écrire un nombre décimal D sous la forme d'un autre nombre décimal D' multiplié par une puissance de 10 avec la condition suivante : le nombre D' n'a qu'un chiffre avant la virgule qui ne doit pas être 0. On demande d'écrire en notation scientique les nombres suivants :

- $0,00268\ = ...$ $\quad (0,02)^3\ = ...$ $\quad 59200000\ = ...$
- $167,91\times 10^6\ = ...$ $\quad 4200,053\times 10^{-6}\ = ...$
- $0,05\times 10^4\ = ...$ $\quad 0,12\times 10^{-2}\ = ...$

II Developper puis simplifier les expressions suivantes :

- $(1-x)(2x+1)^2+(4x^2-1)(x+1)$
- $(x+1)^2-(2x-2)^2$
- $(2x+y^2)(x-y+1)-(2+y)(x^2+y)$

III Factoriser le plus possible les expressions suivantes :

- $24x^2y^3+6x^4y^2-12x^2y^4$
- $3x^2(x-1)-2(x-1)^3$
- $(x+1)^2-(2x-2)^2$
- $(x+2)^2-(2x+3)^2+(3x+5)^2$
- $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$

IV Pour chacune des expressions suivantes, dire s'il s'agit d'une somme ou d'un produit. S'il s'agit d'une somme vous indiquerez à côté la liste des différents termes qui la compose. S'il s'agit d'un produit vous indiquerez le nombre de facteurs. Recommencer l'opération avec chacun des facteurs ou des termes obtenus jusqu'à ce que vous ne puissiez plus aller plus loin.
Exemple pour l'expression $x(2x+3)$: $x(2x+3)$ est le **produit** de x et $2x+3$.
$2x+3$ est la **somme** de 3 et de $2x$. Ce dernier est le **produit** de 2 par x.

- $x(x+2)-3x$
- $4(x+3)(x-2)+5x(x+1)-3$
- $5x^2-3x+1$
- $(x-1)^3(x-2x(x-1))$

Module 06 (Calcul numérique et littéral)

I La notation scientifique :

Par convention, la notation scientifique consiste à re-écrire un nombre décimal D sous la forme d'un autre nombre décimal D' multiplié par une puissance de 10 avec la condition suivante : le nombre D' n'a qu'un chiffre avant la virgule qui ne doit pas être 0. On demande d'écrire en notation scientique les nombres suivants :

- $0,00268=2,68\times 10^{-3}$ $\quad (0,02)^3=(2\times 10^{-2})^3=8\times 10^{-6}$ $\quad 59200000=5,92\times 10^7$
- $167,91\times 10^6=1,6791\times 10^8$ $\quad 4200,053\times 10^{-6}=4,200053\times 10^{-9}$
- $0,05\times 10^4=5\times 10^2$ $\quad 0,12\times 10^{-2}=1,2\times 10^{-3}$

II Developper puis simplifier les expressions suivantes :

- $(1-x)(2x+1)^2+(4x^2-1)(x+1)=4x^2+2x$
- $(x+1)^2-(2x-2)^2=-3x^2+10x-3$
- $(2x+y^2)(x-y+1)-(2+y)(x^2+y)=-y^3-2y+2x-2xy+y^2x-yx^2$

III Factoriser le plus possible les expressions suivantes :

- $24x^2y^3+6x^4y^2-12x^2y^4=6x^2y^2(4y+x^2-2y^2)$
- $3x^2(x-1)-2(x-1)^3=(x-1)(3x^2-2(x-1)^2)=(x-1)\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}(x-1)\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}(x-1)\right)$
- $(x+1)^2-(2x-2)^2=(3x-1)(-x+3)$
- $(x+2)^2-(2x+3)^2+(3x+5)^2=(3x+5)(-x-1)+(3x+5)^2=(3x+5)(2x+4)=2(3x+5)(x+2)$
- $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{4x}{(x-1)(x+1)}$

IV

- $x(x+2)-3x=$ somme de $x(x+2)$ et de $-3x$. $x(x+2)$ est le produit de x par la somme de 2 et de x. $-3x$ est le produit de -3 par x.
- $4(x+3)(x-2)+5x(x+1)-3=$ somme de -3, de $5x(x+1)$ et de $4(x+3)(x-2)$. $5x(x+1)$ est le produit de 5, de x et de la somme de 1 avec x. $4(x+3)(x-2)$ est le produit de 4 par la somme de x et de 3 et par la somme de x avec -2.
- $5x^2-3x+1$ est la somme de 1, du produit de -3 par x et du produit de 5 par le carré de x.
- $(x-1)^3(x-2x(x-1))$ est le produit du cube de $x-1$ (somme de x avec (-1)) et de $x-2x(x-1)$. $x-2x(x-1)$ est la somme de x avec le produit de -2, de x et de $x-1$ (somme de x avec -1)

Module 07 (Ensembles de nombres)

I On veut simplifier la fraction $\frac{15288^4\times 2^{-5}}{(845\times 28^2)^2\times 7^{-1}}$ en utilisant une décomposition en facteurs permiers.

(a) Re-écrire la fraction de façon à ne faire intervenir que des exposants positifs. (b) Prendre le résultat précédent et re-écrire son numérateur et le dénominateur sous forme de produits de facteurs premiers. Pour cela on cherchera à écrire ces 2 nombres sous la forme $2^a\times 3^b\times 5^c\times 7^d\times 11^e\times 13^f$ (le but est donc de chercher pour le numérateur et le dénominateur quels sont les exposants a, b, c... On admet aussi qu'il n'y a pas de facteur premier plus grand que 13 qui intervienne dans ces nombres).
(c) Utilisez vos décomposition obtenues au (b) pour simplifier la fraction de départ.

(d) **Application** : dire en le justifiant si le nombre $\sqrt{\frac{4^3\times 9^8}{75^3\times 3}}$ est un nombre entier, décimal, rationnel ou irrationnel.

II Inclusions et “boites” imbriquées

(a) Dessiner une “boite” représentant l'ensemble des entiers naturels. Dans cette boite dessiner une boite plus petite pour l'ensemble des entiers pairs que l'on notera P et une autre boite pour l'ensemble des entiers impairs que l'on notera I.
(b) Dessiner sur votre graphique des boites représentant les ensembles $E_1=\{1;3;5\}$, $E_2=\{0;1;2;4\}$, $E_3=\{2;4\}$, $E_4=\{0;1;2;3;4;5;6\}$
(c) Donner toutes les relations d'inclusions possible (c'est à dire du type $E_3\subset P$, etc).

III Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel

On va ici utiliser une technique de démonstration baptisée **“démonstration par l'absurde”**. On va donc supposer que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. On va en déduire plusieurs relations et on va chercher s'il y a une contradiction entre ces relations. Si on en trouve une, l'hypothèse de départ était donc fausse, c'est à dire que $\sqrt{2}$ est en fait irrationnel.

(a) Si $\sqrt{2}$ est rationnel, cela veut dire que l'on peut trouver deux nombres entiers p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. Déduisez en que $p^2=2q^2$.

(b) Pourquoi peut on supposer que p et q ne sont pas tous les deux des nombres pairs? Dans la suite on considèrera donc que au moins l'un des deux nombres est impair.

On va démontrer deux résultats intermédiaires. Le (c) et le (d) sont semblables mais seul le (d) servira pour la suite du problème.

(c) Donner les carrés des nombres 2;4;6;8;10. Ces carrés sont ils des nombres pairs ou impairs? Un nombre pair X peut toujours s'écrire $X=2n$ où n est un entier. Calculer X^2 et démontrez que le carré d'un nombre pair est pair.

(d) Donner les carrés des nombres 1;3;5;7;9. Ces carrés sont ils des nombres pairs ou impairs? Un nombre impair Y peut toujours s'écrire $X=2m+1$ où m est un entier. Développer X^2 et démontrez que le carré d'un nombre impair est impair.

Recherche progressive d'une contradiction :

(e) En utilisant le résultat du (d) dans l'expression $p^2=2q^2$ obtenue au (a), démontrer que p ne peut pas être un nombre impair. Dans la suite on suppose donc que p est pair et donc qu'on peut écrire $p=2n$ (n est un entier).

(f) Démontrer que $q^2=2n^2$ (n est défini au (e)).

(g) Par un raisonnement semblable à celui du (e), montrer que q ne peut être impair.

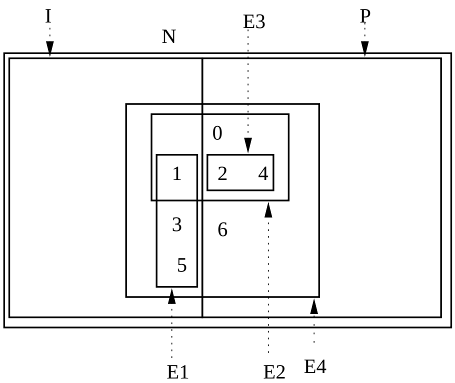
(h) On vient de démontrer au (e) et au (g) que p et q sont deux nombres pairs. Il y a une contradiction avec une phrase de l'énoncé. Trouver de quelle phrase il s'agit.

Module 07 (correction)

I (a) $\frac{15288^4\times 2^{-5}}{(845\times 28^2)^2\times 7^{-1}}=\frac{15288^4\times 7}{(845\times 28^2)^2\times 2^5}$
(b) $15288^4\times 7=(2^3\times 3\times 7^2\times 13)^4\times 7=2^{12}\times 3^4\times 7^9\times 13^4=2^{12}\times 3^4\times 5^0\times 7^9\times 11^0\times 13^4$
$(845\times 28^2)^2\times 2^5=\left(5\times 13^2\times (2^2\times 7)^2\right)^2\times 2^5=\left(5\times 13^2\times 2^4\times 7^2\right)^2\times 2^5=2^{13}\times 3^0\times 5^2\times 7^4\times 11^0\times 13^4$
(Rappel : $3^0=5^0=11^0=1$)
(c) $\frac{2^{12}\times 3^4\times 5^0\times 7^9\times 11^0\times 13^4}{2^{13}\times 5^2\times 7^4\times 13^4}=\frac{3^4\times 7^4}{2\times 5^2}$
(d) $\frac{4^3\times 9^8}{75^3\times 3}=\frac{(2^2)^3\times(3^2)^8}{(3\times 5^2)^3\times 3}=\frac{2^6\times 3^{16}}{3^4\times 5^6}=\frac{2^6\times 3^{12}}{5^6}=\left(\frac{2^3\times 3^6}{5^3}\right)^2$
Donc $\sqrt{\frac{4^3\times 9^8}{75^3\times 3}}=\frac{2^3\times 3^6}{5^3}$ est donc rationnel. De plus une division par 5 se termine toujours donc c'est un nombre décimal (qui vaut en l'occurence $46,656$ et donc ce n'est pas un nombre entier).

II Inclusions et “boites” imbriquées

$E_3\subset E_2\subset E_4\subset N$
$E_3\subset P\subset N$
$E_1\subset E_4\subset N$
$E_1\subset I\subset N$



III Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel

(a) $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, donc $q\sqrt{2}=p$, donc $(q\sqrt{2})^2=p^2$, c'est à dire $2q^2=p^2$.

(b) Si p et q sont pairs, ils sont multiples de 2 et la fraction $\frac{p}{q}$ se simplifie en $\frac{p'}{q'}$ où p' et q' sont deux entiers plus petits. Peut être que p' et q' sont aussi pairs, alors on peut encore simplifier par 2 et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus simplifier la fraction par 2 car le numérateur ou le dénominateur est impair. On va donc prendre la fraction sous sa forme la plus simplifiée, ce qui implique que le numérateur ou le dénominateur est impair (exemple, au lieu de 4/6 on prendra la fraction sous la forme 2/3).

(c) Si $X=2n$ alors $X^2=(2n)^2=2^2\times n^2$ qui est bien un multiple de 2 ($X^2=2\times(2\times n\times n)$). Doc le le carré d'un nombre pair est pair.

(d) Si $X=2m+1$ alors $X^2=(2m)^2+2\times 1\times(2m)+1=4m^2+4m+1=2\times(2m^2+2m)+1$. X^2 est donc un multiple de 2 plus 1, c'est à dire un nombre impair.

(e) Si p était impair, d'après le (d) p^2 serait aussi impair. Seulement p^2 est en fait le double d'un entier car $p^2=2\times q^2$, c'est à dire que p^2 doit être pair. Donc il n'est pas possible que p soit impair (et donc p est pair).
(f) $p=2n$ d'après (e). Or $p^2=2q^2$ donc $(2n)^2=2q^2$, ou encore $4n^2=2q^2$ et en simplifiant par 2 de chaque côté on obtient $q^2=2n^2$

(g) On vient de montrer au (f) que $q^2=2n^2$. q^2 est donc le double du nombre entier n^2 donc q^2 est pair. Il n'est donc pas possible que q soit impair car son carré serait alors impair (voir (d)). Donc q est pair.
(h) p et q sont donc deux nombres pairs. On peut alors simplifier par 2 la fraction $\frac{p}{q}$ mais on a décidé au (b) de prendre la fraction sous une forme qu'on ne peut plus simplifier. Il y a donc une contradiction et $\sqrt{2}$ ne peut être un nombre rationnel.

Module 08 (Ensembles de nombres)

I Raisonnements par l'absurde

(1) On a donc démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est à dire qu'on ne peut pas écrire ce nombre sous forme de fraction de nombres entiers. Sachant cela, écrivez un raisonnement par l'absurde pour démontrer que $3\sqrt{2}-7$ est aussi un nombre irrationnel (On pourra s'aider des lignes suivantes on complètant les trous).

Supposons donc que $3\sqrt{2}-7$ est un nombre ......
On peut donc écrire ce nombre sous la forme $3\sqrt{2}-7 = \ldots$
où .... et ..... sont des nombres ......
Alors on en déduit que $\sqrt{2} =$ ....
Le nombre de droite dans l'égalité ci-dessus est un nombre ..... , car .... ,
donc d'après cette égalité $\sqrt{2}$ serait un nombre ...., alors que l'on a démontré dans un exercice précédent que c'est faux. Il y a donc une contradiction et donc $3\sqrt{2}-7$ est irrationnel.

(2) On ne considère ici que des nombres positifs et non-nuls. Commencons par deux questions préliminaires avant de faire au (c) un raisonnement par l'absurde.
(a) Si je multiplie le nombre A par un nombre x plus petit que 1 le résultat est il plus grand, égal ou plus petit que A?
(b) Même question si x est plus grand que 1.
(c) Si x est un nombre quelconque plus petit que 1, démontrer par l'absurde en utilisant le (a) ou le (b) que $\sqrt{x}$ est alors aussi plus petit que 1.
(d) Faire un raisonnement similaire pour prouver que si $x > 1$, alors $\sqrt{x} > 1$.

II

Trois personnes de nationalités différentes habitent 3 maisons alignées dans une rue. Ces maisons sont de couleurs différentes, et chaque habitant a une profession différente des autres. On sait aussi que :

1. Le français habite la maison rouge.
2. L'allemand est musicien.
3. L'anglais habite la maison du milieu.
4. La maison rouge est à côté de la verte.
5. L'écrivain habite la première maison à gauche.

Quelle est la nationalité de l'écrivain?
Qui habite la maison jaune?

Vous écrirez votre raisonnement en détaillant au maximum et en distinguant bien chaque étape, puis vous soulignerez les parties de votre raisonnement qui correspondent à un raisonnement par l'absurde.

Module 08 (correction)

I Raisonnements par l'absurde

(1)
Supposons donc que $3\sqrt{2}-7$ est un nombre **rationnel**
On peut donc écrire ce nombre sous la forme $3\sqrt{2}-7 = \frac{p}{q}$
où p et q sont des nombres **entiers**
Alors on en déduit que $\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{p}{q}+7\right) = \frac{1}{3} \times \frac{p+7q}{q} = \frac{p+7q}{3q}$
Le nombre de droite dans l'égalité ci-dessus est un nombre **rationnel**, car **c'est une fraction de nombres entiers** ,
donc d'après cette égalité $\sqrt{2}$ serait un nombre **rationnel**, alors que l'on a démontré dans un exercice précédent que c'est faux. Il y a donc une contradiction et donc $3\sqrt{2}-7$ est irrationnel.

(2)
(a) Si je multiplie le nombre A par un nombre x plus petit que 1 le résultat est **plus petit que A** (ex: $123 \times 0,9 = 110,7$ qui est effectivement plus petit que 123).

(b) Si je multiplie le nombre A par un nombre x plus grand que 1 le résultat est **plus grand que A** (Si $A = 1,1$ et $x = 1,1$, alors $A \times x = 1,21$ qui est effectivement plus grand que $1,1$)

(c) x est choisi plus petit que 1. Supposons que $\sqrt{x} > 1$. alors d'après (b) $\sqrt{x} \times \sqrt{x} > \sqrt{x}$ et comme $\sqrt{x} > 1$ on a donc $\sqrt{x} \times \sqrt{x} > 1$, c'est à dire $x > 1$ ce qui est contradictoire avec $x < 1$ que l'on a imposé. L'hypothèse que $\sqrt{x} > 1$ est donc fausse, donc $\sqrt{x} \leq 1$. On n'a pas tout a fait fini, car il faut vérifier aussi que $\sqrt{x}$ ne vaut pas 1. Si c'était le cas $(\sqrt{x})^2$ (qui vaut x) vaudrait $1 \times 1 = 1$. Comme on a choisi $x < 1$, ce n'est pas possible non plus. En conclusion la seule possibilité qui reste est $\sqrt{x} < 1$, et c'est justement ce qu'on voulais démontrer. La racine carrée d'un nombre plus petit que 1 est donc un nombre plus petit que 1.

II

On contraint le tableau suivant par (3) puis (5). **L'allemand étant musicien (2) il ne peut être ni au centre (l'anglais) ni à gauche (l'écrivain) donc il est à droite** et le français (celui qui reste) est donc à gauche. D'après (1) la maison de gauche est rouge, celle d'à côté (donc au centre) est verte d'après (4), et donc la jaune est forcément à droite.

(en gras sont indiquées les parties de raisonnement par l'absurde)

caractristique	1	2	3
couleur	rouge	verte	jaune
nationalité	français	anglais	allemand
profession	écrivain		musicien

Module 09 (équations)

I Equations

$$\begin{aligned}
\frac{2x+5}{2x^3+7x^2+3x-5} &= 0\\
\frac{2}{x-3} &= 5\\
x^2-2x+1 &= 81\\
2x+1-2(2x^2-25) &= 3(x+2)-4x(x+1)\\
\frac{x+1}{x} &= \frac{x-2}{x+1}\\
2x(2x-14)-3(x-7)^2 &= 0
\end{aligned}$$

II Module : "si et seulement si"

Quand on sait que $x=5$, on peut en déduire que $\sqrt{x^2}=5$. On dira alors que $\sqrt{x^2}=5$ si $x=5$.

Si au contraire on sait que $\sqrt{x^2}=5$, peut on en déduire que $x=5$? Autrement dit, peut on écrire que $\sqrt{x^2}=5$ seulement si $x=5$? (justifiez)

Compléter la phrase de façon à ce qu'elle soit exacte :
$\sqrt{x^2}=5$ si et seulement si $x=$ ....

III Module : le contre-exemple

Les énoncés qui suivent sont **TOUS FAUX**. Pour le justifier, il suffit de trouver un cas dans lequel ces énoncés ne marchent pas (on appelle ca un contre-exemple). Trouver un contre-exemple pour chaque cas.

(a) $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
(b) $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
(c) Si $-2\leq x\leq 3$ alors $4\leq x^2\leq 9$
(d) Dans l'espace, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors ces deux droites sont parallèles.
(e) Pour tout réel x on a : $x^2-3x+2\geq 0$
(indication : pensez aux valeurs de x qui ne sont pas enti'eres).
(f) x et y sont deux entiers naturels **non nuls**. Si leur produit est plus petit ou égal à 20 alors leur somme est aussi plus petite ou égale à 20.

IV Factorisations

$$\begin{aligned}
E_1 &= 6x^3+12x^2+6x\\
E_2 &= 4(x+1)^2-49\\
E_3 &= 3(-x+1)(8x^2+2)-(1-x)(x^2-3)
\end{aligned}$$

Module 09 (correction)

I Equations

(1) $\frac{2x+5}{2x^3+7x^2+3x-5}=0$
$2x+5=0\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$ et on vérifie que le dénominateur est nul pour cette valeur de x. Donc $S=\emptyset$.

(2) $\frac{2}{x-3}=5\Leftrightarrow\frac{2-5(x-3)}{x-3}=0$
$\Leftrightarrow\frac{17-5x}{x-3}=0$
17/5 n'annule pas le dénominateur donc $S=\{\frac{17}{5}\}$

(3) $x^2-2x+1=81\Leftrightarrow(x-1)^2=81$
$\Leftrightarrow x-1=9$ *ou* $x-1=-9$ Donc $S=\{10;-8\}$

(4) $2x+1-2(2x^2-25)=3(x+2)-4x(x+1)$
En développant il reste $3x+45=0\Leftrightarrow x=-45/3=-15$

(5) $\frac{x+1}{x}=\frac{x-2}{x+1}\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2-x(x-2)}{x(x+1)}=0\Leftrightarrow\frac{4x+1}{x(x+1)}=0$
$x=-1/4$ n'annule pas le dénominateur donc $S=\{-\frac{1}{4}\}$

(6) $2x(2x-14)-3(x-7)^2=0\Leftrightarrow 4x(x-7)-3(x-7)^2=0\Leftrightarrow(x-7)(4x-3(x-7))=0\Leftrightarrow(x-7)(x+21)=0$
$\Leftrightarrow(x=7$ *ou* $x=-21)$ $\quad S=\{7;-21\}$

II Module : "si et seulement si"

Quand on sait que $x=5$, on peut en déduire que $\sqrt{x^2}=5$. On dira alors que $\sqrt{x^2}=5$ si $x=5$.

Peut on écrire que $\sqrt{x^2}=5$ seulement si $x=5$? Non car $\sqrt{x^2}=5$ aussi si $x=-5$.

$\sqrt{x^2}=5$ si et seulement si $x=5$ ou $x=-5$

III Module : le contre-exemple

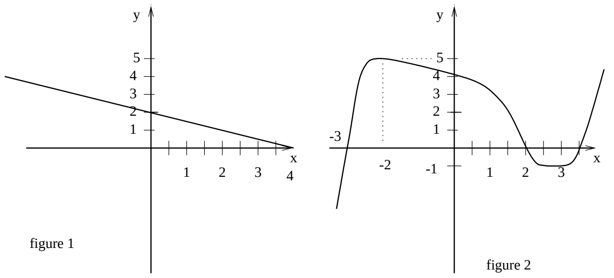
(a) Si $x=9$, $y=16$ alors $\sqrt{x+y}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ alors que $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3+4=7$
(b) Si $x=y=1$, $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2}$ alors que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$
(c) Si $x=0$, on a bien $-2\leq x\leq 3$ mais $x^2=0$ ne vérifie pas $4\leq x^2\leq 9$
(d) Dans l'espace, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors ces deux droites sont parallèles (c'est faux car on peut prendre en exemple 3 arêtes d'un cube passant par un même sommet).
(e) Pour tout réel x on a : $x^2-3x+2\geq 0$ (faux en prenant $x=1,5$ par exemple)
(f) Si $x=1$ et $y=20$ leur produit vaut bien 20 mais leur somme fait $20+1=21$ plus grand que 20.

IV Factorisations

$$\begin{aligned}
6x^3+12x^2+6x &= 6x(x^2+2x+1)=6x(x+1)^2\\
4(x+1)^2-49 &= (2(x+1))^2-7^2\\
&= [2x+2-7]\,[2x+2+7]\\
&= (2x-5)(2x+9)\\
E_3 &= 3(-x+1)(8x^2+2)-(1-x)(x^2-3)\\
&= 6(1-x)(4x^2+1)-(1-x)(x^2-3)\\
&= (1-x)\left(6(4x^2+1)-(x^2-3)\right)\\
&= (1-x)(23x^2+9)
\end{aligned}$$

Module 10 (fonctions)

I(1) **Compléter à partir de la figure 1 :**
(a) $f(0) =$ ....
(b) L'image de $x = -4$ par f est ....
(c) $f(x) > 0$ si et seulement si ....
(d) $f(x)$................. si et seulement si $x < 0$
(e) Si x varie de -6 à 4, $f(x)$ varie de ....
(f) Pour quelles valeurs de x a t'on $f(x) = 1$? (ces valeurs de x sont appelés les antécédents de y=1).
I(2) **Compléter à partir de la figure 2 :**
(a) L'image de 0 par f est ....
(b) Si x varie de 0 à 3, $f(x)$ varie entre ....
(c) Si x varie entre -3 et 3,5 $f(x)$ varie entre ....
(d) Trouver les trois antécédents de $y = 0$ (voir (1)f)



II Voici 4 tarifs minitels différents (tarifs par mois) :
(1) Forfait de 420F
(2)Forfait de 147F puis 0,20F par minute de connexion
(3) 0,45F par minute de connection
(4) Forfait de 360F pour les 25 premières heures de connexion puis si on dépasse ce temps, on ajoute 40F par tranche de 5 heures supplémentaires

(a) Ces tarifs sont des fonctions du temps de connexion. **Ecrire les 4 fonctions** correspondant aux 4 tarifs (on prendra comme variable t (en heures), qu'on considèrera plus petit que 35h, et on écrira les fonctions sous la forme $f_1 : t \mapsto ....$; $f_2 : t \mapsto ....$; etc).
(b) **Représenter** ces fonctions sur un graphique (en échelle verticale on ira jusqu'à 1000F, et jusqu'à 35h sur l'axe horizontal).
(c) Sur le graphique on constate que suivant le temps de connexion, un des tarifs est plus avantageux que les autres. On désignera par g la fonction qui pour chaque durée de connexion associe le meilleur des 4 tarifs. **Repasser avec une couleur différente des autres la courbe qui représente la fonction g**.

III Module : vérifier un résultat

(a) Transformer simplement l'équation $x^2 - x = 2$ de façon à obtenir ...... $= -6$
(b) Compléter : .... $\Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \quad ou \quad x - 2 = 0$
(c) Dans l'équation $\frac{x^2-3x+7}{-5x+6} = 1$, pour "passer" le $-5x + 6$ de l'autre côté on ...... $-5x + 6$ des deux côtés du signe "=".
(d) Développer $\left(x - \frac{1}{3}\sqrt{x}\right)^2$

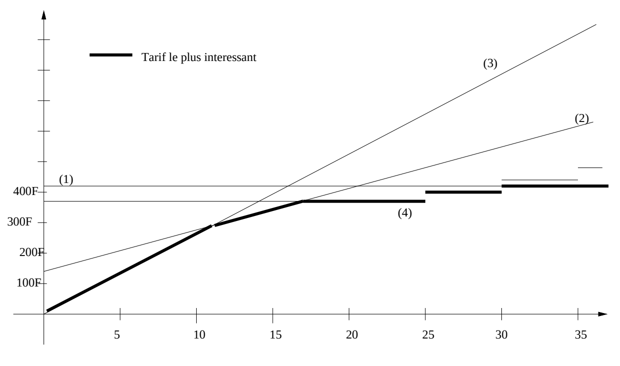
Corriger ce qui suit en s'aidant de ce qui précède :
(1) $(3x+1)(x-2)-2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow 3x+1 = 0 \quad ou \quad (x-2) = 0$
(2) $\frac{3x+2}{2x-1} = 0$ donc $3x + 2 = 2x - 1$
(3) $\frac{x^2-3x+7}{-5x+6} = 1$ donc $x^2 - 3x + 7 = -5x + 6 + 1$
(4) $x^2 - 3x = -6 \Leftrightarrow x^2 - x = \frac{-6}{-3} = 2$
(5) Pour tout x, $\frac{\cancel{2}+3x}{\cancel{2}+x} = \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3$
(6) $x^2 - \frac{2}{9}x = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{3}\sqrt{x} = 1$

Module 10 (correction)

I(1) **Compléter à partir de la figure 1 :**
(a) $f(0) = 2$
(b) L'image de $x = -4$ par f est 4 car $f(x) = -x/2 + 2$
(c) $f(x) > 0$ si et seulement si $x < 4$
(d) $f(x) > 2$ si et seulement si $x < 0$
(e) Si x varie de -6 à 4, $f(x)$ varie de 5 à 0
(f) $f(x) = 1$ n'a qu'une solution ici : $x = 2$
I(2) **Compléter à partir de la figure 2 :**
(a) L'image de 0 par f est 4
(b) Si x varie de 0 à 3, $f(x)$ varie entre 4 et -1
(c) Si x varie entre -3 et 3,5 $f(x)$ varie entre 5 et -1
(d) Les trois antécédents de $y = 0$ sont $x = -3$, $x = 2$ et $x = 3,5$

II $f_1 : t \mapsto 420$; $f_2 : t \mapsto 147 + t \times 0,2 \times 60$; $f_3 : t \mapsto t \times 0,45 \times 60$ (t en **heures**)

$$f_4 : t \mapsto \begin{cases} t \mapsto 360 & si \quad t \in [0;25] \\ t \mapsto 400 & si \quad t \in]25;30] \\ t \mapsto 440 & si \quad t \in]30;35] \end{cases}$$



III Module : vérifier un résultat

(a) $x^2 - x = 2 \Leftrightarrow (-3) \times (x^2 - x) = -6 \Leftrightarrow -3x^2 + 3x = -6$
(b) $(3x + 1) \times (x - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \quad ou \quad x - 2 = 0$
(c) Dans l'équation $\frac{x^2-3x+7}{-5x+6} = 1$, pour "passer" le $-5x + 6$ de l'autre côté on **multiplie** $-5x + 6$ des deux côtés du signe "=".
(d) $\left(x - \frac{1}{3}\sqrt{x}\right)^2 = x^2 - \frac{2x\sqrt{x}}{9} + \frac{x}{9}$

Ce qui suivait dans l'énoncé était un échantillon de vos erreurs dans vos copies.

(1) $(3x+1)(x-2)-2x(x-2)$ n'est pas un produit, le théorème ne s'applique pas.
(2) $0 \times (2x + 1) = 0$ et non $= 2x + 1$
(3) $= (-5x + 6) \times 1$ et non $= -5x + 6 + 1$ (4) voir (a)
(5) On simplifie dans les fractions quand on a un produit en haut et en bas seulement.
(6) $\sqrt{x + y}$ n'est pas égal à $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

Module 11 (fonctions)

I Un paysan veut clôturer une partie de son champ en forme de rectangle de 900 m^2, et en utilisant le moins possible de fil de fer. On note x la longueur d'un des côtés du rectangle, et x' l'autre. Comme l'aire du rectangle est donnée, si on connaît x, alors on peut calculer $l(x)$, le périmètre du rectangle.

(1) Déterminer l'expression de la fonction $x \mapsto l(x)$ sous la forme $l(x) =$ ....

(2) Représenter graphiquement la fonction l. Pour cela on calculera les valeurs de $l(x)$ pour x compris entre 5 et 100m en allant de 5m en 5m ($x = 5; 10; 15....$).

(3) Lire sur le graphique quelle est la plus petite longueur de fil de fer à acheter et donner les dimensions du rectangle dans ce cas.

(4) Donner le(s) antécédent(s) de 150m (c'est à dire trouver x pour que la longueur l(x) soit de 150m). On donnera un résultat approché à l'aide du graphique.

(5) Si x se rapproche de plus en plus de 0, la longueur de fil de fer atteind elle une valeur maximale? On pourra s'aider de différents dessins du rectangle pour répondre.

(6) Même question que (5) en prenant x de plus en plus grand (on dit qu'on fait tendre x vers $+\infty$).

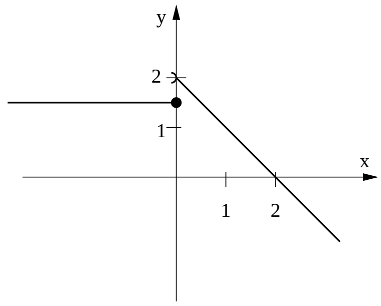
II De l'utilité de la notation "f(x)"

(1) Pour un nombre x donné, le nombre $x(1-x)$ ne dépasse jamais $0,25$ ce qui n'a rien d'évident et nous allons le justifier. Considérons la fonction $f\ : x \mapsto x(1-x)$. Déterminer la fonction $g\ : x \mapsto f\left(\frac{1}{2} + x\right)$. On développera l'expression de g. Comme x est un nombre quelconque, $x' = \frac{1}{2} + x$ est il aussi un nombre quelconque (justifiez)? Conclure.

(2a) On voudrais calculer l'image d'un nombre x par l'épouvantable fonction
$f\ : x \mapsto (x - 3\sqrt{x})^8 - \frac{5}{x-3\sqrt{x}} + \frac{1}{2}(x - 3\sqrt{x})$
Comment peut on s'y prendre pour limiter au maximum les opérations à effectuer sur la calculatrice?

(2b) Considérons les fonctions $g\ : x \mapsto x^8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{2}x$ et $h\ : x \mapsto x - 3\sqrt{x}$. Pour calculer le nombre f(x) du (2a) le plus simplement possible on va donc calculer $f(x) = g(.............)$ (compléter).

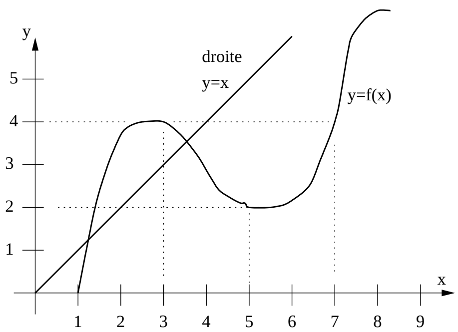
III La fonction f est défini par $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1,5 \ \ si \ \ x \leq 0 \\ 2 - x \ \ si \ \ x > 0 \end{cases}$.
Sa représentation graphique est la suivante :



(1) Calculer l'image de 1 et de -2 par f. Calculer s'ils existent les antécédents de 3 , de 2 et de -1 par f.
(2) Définissez le plus précisément possible les fonctions suivantes $g\ : x \mapsto f(x-1)$ et $h\ : x \mapsto f(x) - 1$
(3) Représentez graphiquement les fonctions g et h sur des graphiques séparés. Que remarquez vous?
(4) Refaire le (2) et le (3) avec les fonctions $p\ : x \mapsto -f(x)$ et $q\ : x \mapsto f(-x)$.

Module 12 (fonctions)

I (1) Donner le tableau de variation de la fonction f définie sur $[1; 9]$ dont la courbe est tracée ci-dessous.



(2) Par lecture graphique, répondre par vrai ou faux : (a) 1 a pour image 0 par f? (b) $f(3) = 4$?
(c) 0 a pour image 1 par f? (d) $f(6) < 2$?
(e) 4 est un antécédent de 7 par f? (f) $f(2) = 5$?
(g) 3 est un antécédent de 4 par f? (h) $f(3) > f(5)$?
(i) 0,5 a un seul antécédent par la fonction f?
(j) L'équation $f(x) = 3$ a au moins une solution?
(k) L'équation $f(x) = x$ a au moins une solution?
(l) f est croissante sur $[1; 8]$?
(m) f est décroissante sur $[3; 5]$?
(n) Si $4 \leq x \leq 5$ alors $f(x) \leq x$?
(o) Si x et y sont dans $[1; 3]$ et que $x < y$ alors $f(x) < f(y)$?
(p) 2,5 a trois antécédents par la fonction f?

II On considère un demi-cercle de centre 0 et de rayon 2 dans un repère (on ne prend que la partie où $y \geq 0$). A quelle fonction correspond cette courbe? (indication : considérer un point M de coordonnées x et y sur le demi-cercle et utiliser Pythagore)
Donner son tableau de variations.

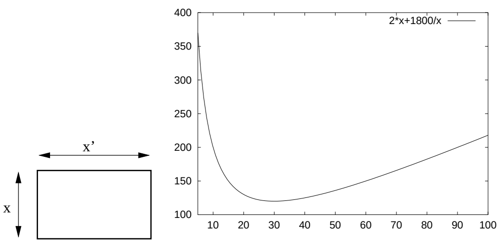
III A partir du tableau de variation suivant, répondre par vrai, faux ou "impossible de répondre" aux affirmations qui suivent.

x	-7		-3		1		7
f(x)			5				0
		↗		↘		↗	
	1				-2		

(a) $f(5) = -3$? (b) $f(-4) < 5$?
(c) $-2 < f(0) < 5$? (d) $f(6) = 2$?
(e) $f(3) = -1$?
Tracer une courbe qui pourrait représenter cette fonction.

Module 11 (correction)

I Le périmètre vaut $l(x) = 2x + 2x'$. Pour connître x' on utilise le fait que l'aire vaut 900 m^2, c'est à dire $x \times x' = 900$. Donc $x' = \frac{900}{x}$ et si on remplace dans l'expression de $l(x)$ on obtient $l(x) = 2x + \frac{1800}{x}$



(3) Plus petite longueur de fil a acheter $=$ 120 m pour $x = 30$ m (dans ce cas $x' = 30$ m, le champ est alors carré).
(4) Pour 150 metres de fil les valeurs possibles de x sont $x = 15$ et $x = 60$.
(5) Si x est de plus en plus petit, le périmetre grandi de plus en plus et n'a pas de limite. On dit que le périmètre tend vers l'infini quand x tend vers 0 (attention, x ne peut pas valoir 0 car il est impossible de diviser par 0 et on ne peut alors pas calculer $l(0)$.
(6) De même si x devient de plus en plus grand (x tend vers l'infini), le périmètre tend alors aussi vers l'infini.

II De l'utilité de la notation "f(x)"

(1) La fonction f est défini par $f\ : x \mapsto x(1-x)$
Donc $f\ : x + \frac{1}{2} \mapsto \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)$
Cela signifie que $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{4} - x^2$ (en développant).
Comme $x^2 \geq 0$ on a $f\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$. Ceci est vrai pour tout nombre x réel. Quel que soit x' réel on peut trouver x tel que $x' = x + \frac{1}{2}$ (il suffit de choisir $x = x' - 1/2$). Donc on peut écrire $f(x') \leq \frac{1}{4}$ pour tout nombre réel x'. Donc $x' \times (1 - x')$ est toujours plus petit (ou égal) à $\frac{1}{4} = 0,25$ et c'est ce qu'on voulait démontrer.

(2a) Pour limiter les calculs, on calcule d'abord $x - 3\sqrt{x}$ que l'on note x' (et éventuellement qu'on met en mémoire dans la calculatrice) puis on calcule $x'^8 - \frac{5}{x'} + \frac{1}{2}x'$. On procède donc avec une étape intermédiaire.

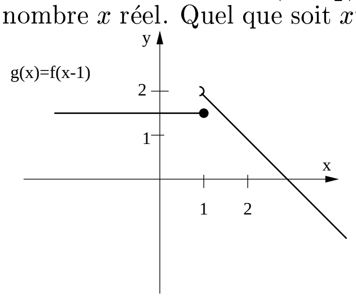
(2b) $f(x) = g\left(x - 3\sqrt{x}\right) = g\left(h(x)\right)$. Cette notation signifie qu'on calcule d'abord $h(x)$ (la première étape) puis on remplace dans l'expression de g le nombre x par le nombre $h(x)$ qu'on vient de calculer.

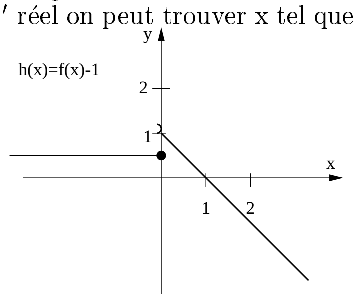
III (1) L'image de 1 vaut 2-1=1 (car $1 > 0$). L'image de -2 vaut 1,5 (car $-2 \leq 0$). Le nombre 3 n'a pas d'antécédent, ni le nombre 2 ($f(0) = 1$ comme indiqué par le point sur le graphique, le demi-cercle sur l'autre demi droite indique que ce point ne fait pas partie de la courbe). Pour -1 on résoud les équations $1,5 = -1$ et $x \leq 0$ (impossible) et $2 - x = -1$ avec $x > 0$ et on trouve un seul antécédent : $x = 3$.

(2) $g\ : x \mapsto \begin{cases} 1,5 \quad si \quad \boxed{\text{x-1}} \leq 0 \\ 2 - \boxed{\text{(x-1)}} \quad si \quad \boxed{\text{x-1}} > 0 \end{cases}$ ou encore :

$g\ : x \mapsto \begin{cases} 1,5 \quad si \quad x \leq 1 \\ 3 - x \quad si \quad x > 1 \end{cases}$

$h\ : x \mapsto \begin{cases} 1,5\boxed{\text{-1}} = 0,5 \quad si \quad x \leq 0 \\ (2-x)\boxed{\text{-1}} = 1 - x \quad si \quad x > 0 \end{cases}$



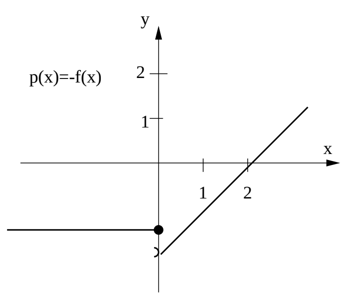


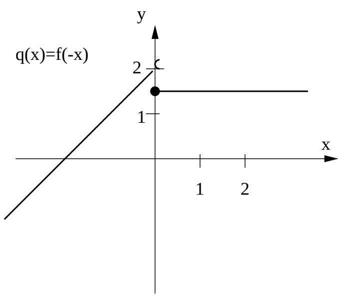
On remarque que la courbe de $g(x)$ est la même que celle de $f(x)$ mais déplacée de 1 à droite. Celle de $h(x)$ est aussi comme celle de $f(x)$ mais déplacée de 1 vers le bas.

(4) $p\ : x \mapsto \begin{cases} -1,5 \quad si \quad x \leq 0 \\ -(2-x) = -2 + x \quad si \quad x > 0 \end{cases}$

$q\ : x \mapsto \begin{cases} 1,5 \quad si \quad (-x) \leq 0 \\ 2 - (-x) = 2 + x \quad si \quad (-x) > 0 \end{cases}$ c'est à dire :

$q\ : x \mapsto \begin{cases} 1,5 \quad si \quad 0 \leq x \\ 2 + x \quad si \quad 0 > x \end{cases}$





Module 12 (correction)

I

x	1		3		5		9
f(x)			4				
		↗		↘		↗	
	0				2		

(2) (a) Vrai (b) Vrai (c) Faux, f n'est pas défini en 0
(d) Faux (entre $x = 4$ et $x = 7$ $f(x)$ ne descend pas en dessous de 2
(e) Faux car $f(4) < 7$ (f) Faux car $f(2) < 4$
(g) Vrai car $f(3) = 4$ (h) Vrai (i) Vrai
(j) Vrai (il y a 3 solutions) (k) Vrai (2 solutions)
(l) Faux car f décroit par endroits (m) Vrai
(n) Vrai (o) Vrai (f croissante sur $[1;3]$) (p) Vrai

II M est sur le demi cercle a condition que sa distance au centre soit égale à 2. Cette distance vaut $\sqrt{x^2 + y^2}$. On a donc $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, ou encore $x^2 + y^2 = 4$ donc $y^2 = 4 - x^2$ et comme $y \geq 0$ on a $y = \sqrt{4 - x^2}$. La fonction est donc $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$

x	-2		0		2
f(x)			2		
		↗		↘	
	0				0

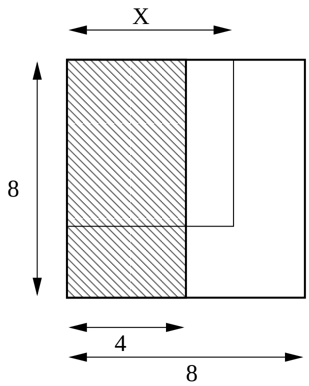
III (a) Faux (b) Vrai (si $f(-4) = 5$ la fonction serai constante entre -4 et -3)
(c) Vrai (d) faux (e) impossible de répondre

Module 13 (fonctions)

I Les fonctions en géométrie Les transformations que vous avez vues au collège sont en fait des fonctions. Prenons par exemple une symétrie centrale de centre I, qu'on notera S_I. A chaque point M je peux obtenir son symétrique M'. M' est appelé l'image de M par la fonction S_I et on note $M' = S_I(M)$.

(1) Placer sur votre feuille deux points I et J (distants de environ 3 à 4 cm par exemple). S_I désigne la symétrie de centre I et S_J la symétrie de centre J. Placer les points $J' = S_I(J)$ et $I' = S_J(I)$.
(2) Completer la phrase :
"L'image de I par une symétrie de centre I est ...."
(3) Identifier les points $S_I(I)$ et $S_J(J)$.
(4) A partir des deux symétries on fabrique une autre transformation (fonction) plus compliquée : à un point M de départ on note M' son symétrique par rapport à I (autrement dit $M' = S_I(M)$), puis on prend le symétrique de M' par rapport cette fois-ci à J (on note $M'' = S_J(M')$).
M" dépend donc du point M, et on note $M'' = T(M)$, T étant la nouvelle fonction. On a donc par définition $T\ :\ M \mapsto M'' = S_J(S_I(M))$. Compléter la phrase :
M" est l'image par ..... de ...... par S_I du point M
(5) Prenez au hasard 5 points aux environs de I et J, et placer leur image par la nouvelle fonction T.
En observant les points que vous avez tracé, devinez à quoi correspond en fait la fonction T (indication : c'est une transformation que vous avez déjà vue au collège)

II Pour chaque valeur de x côté du petit carré, on peut calculer $A(x)$, **l'aire** de la partie hachurée **qui est contenue dans ce petit carré.**

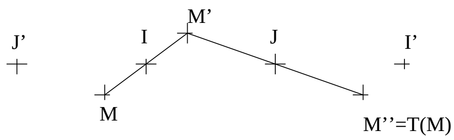


(1) Faire un dessin pour $x < 4$
(2) Définir la fonction $A(x)$ sous la forme $A\ : x \mapsto$ .....
(3) Tracer la courbe représentative de cette fonction.
(4) Refaire le (2) pour $B(x)$ où $B(x)$ est l'aire de la partie non-hachurée du petit carré.
(5) Tracer la courbe de B(x) et celle de A(x)+B(x) sur le même graphique que celui fait au (3).

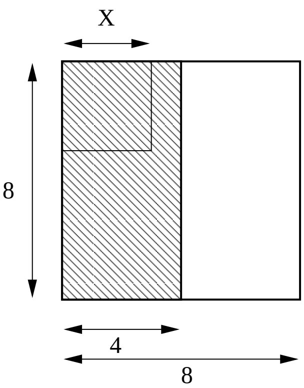
Module 13 (correction)

I Les fonctions en géométrie

"L'image de I par une symétrie de centre I est **le point I lui même**"
(3) $S_I(I) = I$ et $S_J(J) = J$ d'après ce qui précède.
$T\ :\ M \mapsto M'' = S_J(S_I(M))$, ce qui signifie :
M" est l'image par S_J de l'image par S_I du point M
(5) T est en fait une translation (celle qui fait passer de I à I' ou de J' à J).



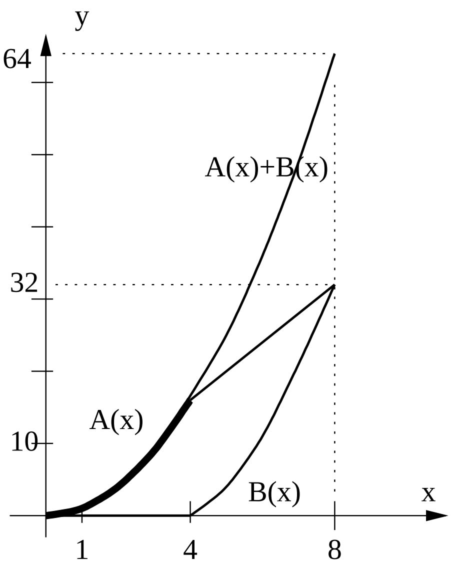
II



$$A\ : x \mapsto \begin{cases} x^2 & si\ \ x \le 4 \\ 4x & si\ \ x > 4 \end{cases}$$

$$B\ : x \mapsto \begin{cases} 0 & si\ \ x \le 4 \\ x(x-4) & si\ \ x > 4 \end{cases}$$

$$A + B\ : x \mapsto x^2 \quad (0 \le x \le 8)$$



Module 14 (fonctions)

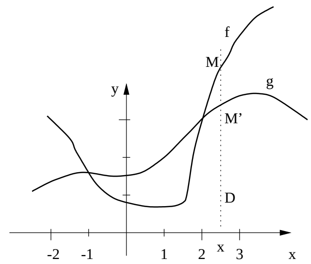
I Encore des fonctions en géométrie

Tracer au centre de votre feuille deux points distants d'environ 3 centimètres. On note R_I la rotation de centre I et d'angle 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. De même, R_J est la rotation de centre J et de même angle. Pour chaque point M du plan on notera $M' = F(M)$ son image par la transformation F définie par $M' = R_J(R_I(M))$ (on fait tourner M autour de I, puis on fait tourner le point obtenu autour de J et on obtient M').

(1) On note K_1 et K_2 les points d'intersection du cercle de diamètre $[IJ]$ avec la médiatrice de $[IJ]$. Tracer les images de ces deux points par la fonction F.
(2) Placer 4 autres points A,B,C et D n'importe où sur la feuille mais pas trop éloignés des points I et J. Tracer leur image par F qu'on notera A',B',C',D'. Relier les points A,B,C et D, puis les points A',B',C',D'. Quelle est en fait cette fonction F? Combien d'antécédents peut avoir un point quelconque du plan par cette fonction F?

II On a représenté sur la figure suivante les courbes de deux fonctions, f et g. M et M' sont des points mobiles sur ces courbes ayant la même abscisse x.

(1) Ecrire les coordonnées de M et de M' en fonction de x
(2) Que peut on dire de f(x) et de g(x) si on choisi x de telle sorte que M et M' soient confondus?
(3) Pour quelles valeurs de x a t'on $f(x) > g(x)$ (on donnera la réponse en utilisant les notations d'intervalles). A quoi cela correspond il pour les points M et M'?
(4) **Application** : on prend $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{3-x}{2}$
Tracer rapidement les courbes de ces fonctions dans un même repère (on prendra x entre -2 et 2). Résoudre à l'aide de votre graphique l'équation $x^2 = \frac{3-x}{2}$ puis l'inéquation $x^2 < \frac{3-x}{2}$
(5) Pour résoudre le (4) on aurait pu prendre aussi $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}$. Que doit on prendre alors pour $g(x)$?
(6) Résoudre graphiquement $x^2 - x - 2 \geq 0$ (on pourra réutiliser le graphique du (4) si besoin)



III Module: Voici 4 équations et 2 énoncés:

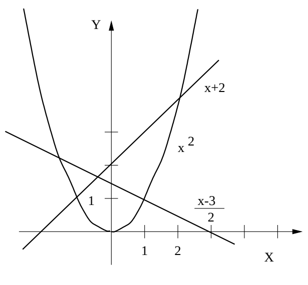
$40x - 15 = 2$ $\quad$ $15x + 2 = 2x + 40$
$15(x + 2) = 40x$ $\quad$ $2x + 40 = 2(x + 15)$

(A) Un âne porte 15 sacs de sel et 2kg d'olives. Un mulet porte 2 sacs de sel et 40kg d'olives. L'âne et le mulet portent la même charge, combien vaut elle?
(B) Bernard part en footing à $15\,km/h$. David part 2 heures plus tard en mobylette à $40\,km/h$ pour rejoindre Bernard. Combien de temps met il pour le rattraper?

(1) Parmi ces équations, choisir celles qui correspondent respectivement à l'énoncé A et à l'énoncé B.
(2) Résoudre les énoncés A et B.

Module 14 (correction)

II
(1) M se trouve sur la courbe de f donc M(x;f(x))
M' se trouve sur la courbe de g donc M'(x;g(x))
(2) Quand M et M' sont confondus (intersection des deux courbes), on a alors $f(x) = g(x)$. On utilise cette propriété pour résoudre **graphiquement** une équation de la forme $f(x) = g(x)$.
(3) $f(x) > g(x)$ pour $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$ (ces valeurs de x correspondent à M au dessus de M')
(4) Le graphique montre que $x^2 = \frac{3-x}{2}$ quand $x = -1,5$ et quand $x = 1$, et que $x^2 < \frac{3-x}{2}$ pour $x \in]-1,5; 1[$



(5) Pour résoudre le (4) on aurait pu prendre aussi $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}$ et $g(x) = \frac{3-x}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{x}{2}$. Cela décale les deux courbes vers le bas mais ne change pas les abscisses qui sont solution de l'équation ou de l'inéquation.
(6) $x^2 - x - 2 \geq 0$ équivaut à $x^2 \geq x + 2$
En tracant la droite $y = x + 2$ sur le graphique on constate que les solutions sont $S =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

Module 15 (correction)

I (1) Si M(x;y) est un point quelconque du plan et M' le symétrique de M par rapport à la droite y=x, alors M' a pour coordonnées M'(y;x)
(3) Pour chaque abscisse il n'y a qu'une seule image. La nouvelle courbe correspond donc bien a une fonction. Si M(x;y) est sur cette courbe, c'est le symetrique de M'(y;x) qui est sur la courbe de $x \mapsto x^2$, donc l'ordonnée de M' est le carré de son abscisse, c'est à dire $x = y^2$. Les coordonnées x et y de M vérifient donc $y = \sqrt{x}$ (car x et y sont positifs).

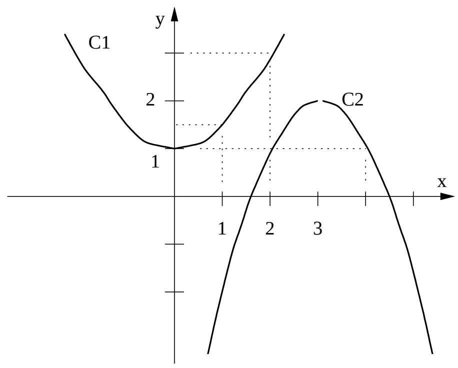
II (1) Pour C_1, l'axe de symétrie est $x = 0$ ce qui donne $q = 0$. Ensuite en $x = 0$, $y = 1$ ce qui donne en remplacant $p = 1$. Reste a trouver r en utilisant un autre point, par exemple $x = 1$, $y = 1,5$ et on trouve en remplacant $r = \frac{1}{2}$. On a donc $f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$
Pour C_2, l'axe de symétrie est en $x = 3$ donc $q = 3$. En $x = 3$, $y = 2$ donc en remplacant on obtient $p = 2$. Enfin en $x = 2$ on a $y = 1$ et en remplacant on trouve $r = -1$. Finalement on a $f_2(x) = 2 - (x - 3)^2$
(2) $f_2(x) \leq 1$ pour $x \in]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$ et $f_1(x) = x$ n'a pas de solution (la droite $y = x$ ne rencontre jamais la courbe).
(3) $2(f_1(x) - x) - 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ donc $2(f_1(x) - x) \geq 1$ quel que soit x et donc $f_1(x) - x$ ne peut pas être nul.

Module 15 (fonctions)

I Tracer sommairement la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $x \mapsto x^2$ (uniquement pour $x \geq 0$) et la droite $y = x$ dans un même repère.

(1) Soit M(x;y) un point quelconque du plan et M' le symétrique de M par rapport à la droite y=x. Quelles sont alors les coordonnées de M'?
(2) Tracer la courbe symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $y = x$, on obtient une nouvelle courbe qu'on notera $\mathcal{C}'$.
(3) Pourquoi cette nouvelle courbe représente t'elle une fonction?
(4) Si un point M(x;y) se trouve sur cette nouvelle courbe alors on a $y = f(x)$ où f est la nouvelle fonction. Quelle est cette fonction? (utiliser la question (1)).

II On considère deux paraboles C_1 et C_2 représentées sur la figure suivante:



(1) Les fonctions correspondant à ces deux courbes peuvent s'écrire sous la forme $f(x) = p + r(x - q)^2$, où p,q et r sont trois nombres réels. On demande de trouver ces trois nombres pour chacune des courbes C_1 et C_2.

(2) Résoudre graphiquement $f_2(x) \leq 1$, puis l'équation $f_1(x) = x$.

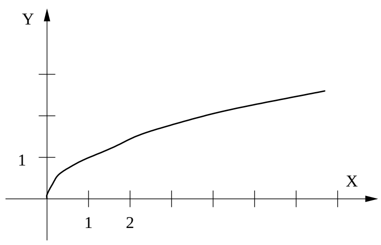
(3) Calculer l'expression $2(f_1(x) - x) - 1$ en utilisant l'expression de f_1 obtenue au (1) et factoriser le résultat. Justifier par ce calcul le résultat de l'équation du (2).

III Tracer sur votre feuille une droite D et un point A en dehors de cette droite (à quelques centimètres).

(1) Prenons un point B n'importe où sur D. Un point M quelconque de la médiatrice de $[AB]$ est par définition à égale distance de A et de B. A quelle condition le point M est il de plus à égale distance de A et de la droite D?
(2) En s'inspirant de la construction du point M à la question précédente, tracer une dizaine de points au moins qui se trouvent à égale distance du point A et de la droite D.
En imaginant qu'on ait tracé tous les points possibles, on obtient une courbe. De quelle type de courbe s'agit il à votre avis?

Module 16 (fonctions)

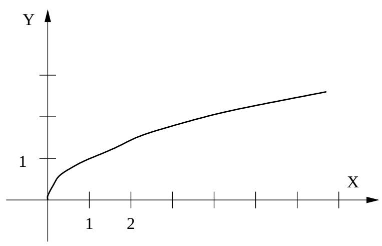
I La courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ est représenté ci-dessous.
(1) Représenter sur le même graphique $x \mapsto \sqrt{x} + 2$ et $x \mapsto \sqrt{x+1}$
(2) Résoudre graphiquement $\sqrt{x+1} = x - 1$, puis résoudre cette équation et comparer avec le résultat précédent. Pourquoi n'y a t'il effectivement qu'une seule solution?



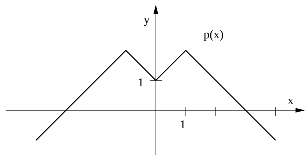
II (1) La fonction $x \mapsto 1/x$ est elle décroissante sur R^*? Sur quels intervalles est elle constamment croissante ou constamment d'ecroissante?
(2) La fonction $p(x)$ est paire, définie entre $x = -4$ et $x = 4$ et on sait de plus que $p(x) = 3 - x$ si $x > 1$ et $p(x) = x + 1$ si $0 \leq x \leq 1$. Tracer sa courbe représentative et donner son tableau de variation.
(3) La fonction $i(x)$ est impaire, définie entre $x = -4$ et $x = 4$ et on sait de plus que $i(x) = 3 - x$ si $x > 1$ et $i(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$. Tracer sa courbe représentative et donner son tableau de variation.
(4) Paires, impaires ou ni l'un ni l'autre?
$f_1(x) = 2x + 3 \qquad f_2(x) = (x + 1)^2$
$f_3(x) = x^6 - 3x^2 \qquad f_4(x) = (x + x^3)^2$
$f_5(x) = (x + 1)^4 - (x - 1)^4$

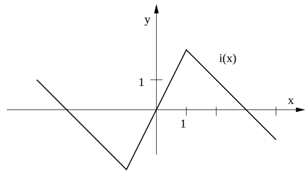
Module 16 (correction)

I $\sqrt{x+1} = x - 1$ a pour solution $x = 3$. Par le calcul on a en mettant au carré $x + 1 = x^2 - 2x + 1$, donc $x^2 - 3x = 0$ ce qui se factorise en $x(x - 3) = 0$. $x = 0$ semble être aussi solution, mais alors $x - 1 = -1$ mais $\sqrt{x+1}$ ne peut pas être négatif. Donc $x = 3$ est la seule solution.



II (1) $f : x \mapsto 1/x$ est décroissante pour $x < 0$ ou pour $x > 0$ mais pas sur les deux intervalles réunis car elle "remonte" en passant de $x < 0$ à $x > 0$.





x	-4		-1		0		1		4
p(x)	-1	↗	2	↘	1	↗	2	↘	-1

x	-4		-1		0		1		4
i(x)	1	↘	-2	↗			2	↘	-1

(4) f_1 et f_2 sont ni l'un ni l'autre, f_3 et f_4 sont paires et f_5 impaire car $(-x+1)^4 - (-x-1)^4 = (-(x-1))^4 - (-(x+1))^4 = (x-1)^4 - (x+1)^4 = -f_5(x)$

Module 17 (Ordre des nombres)

Pour justifier qu'un nombre est plus grand qu'un autre, on citera toujours la ou les règles de comparaison utilisées. La calcularice pourra être utilisée pour vérifier un résultat mais ne suffit pas pour justifier.

I (1) Comparer $x = 1,3$ et $y = \frac{13}{10}$ (on devra utiliser deux règles de comparaison)
(2) Comparer $x = 3$ et $y = 2\sqrt{2}$, puis comparer $a = -4$ et $b = -3\sqrt{2}$
(3) On veut comparer $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$
Quel est le signe du nombre $a - b$ (on pourra s'aider de la question (2))?
Connaissant le signe de $a - b$, lequel des deux nombres est le plus grand?
(4) Comparer $\sqrt{12} - \sqrt{48}$ et $\sqrt{12} - 7$
(5) Comparer $(1 - 10^{-25})^2$ et $1 - 2 \times 10^{-25}$ (on pensera à utiliser les identités remarquables)

II Montrer que les informations suivantes concernant un rectangle sont contradictoires:
- La largeur fait au moins 130m
- L'aire de dépasse pas 1,685 hectares

(Remarques : 1 hectare = $100m \times 100m$, la longueur du rectangle est plus grande que sa largeur)

III A l'aide d'une des règles de comparaison, démontrer que quels que soient les nombres a et b **positifs**, alors $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

IV Module Vrai ou faux ?(justifiez vos réponses **et** pour chaque question on tracera un axe gradué sur lequel on hachurera de deux couleurs différentes les deux intervalles intervenant dans la question)
(1) Si on sait que $2 \leq x$ alors on est sûr que $0 \leq x$?
(2) Si on sait que $x \leq 13$ alors on est sûr que $x \leq 10$?
(3) Si on sait que $3 \leq x \leq 7$ alors on est sûr que $5 \leq x \leq 8$?
(4) Si on sait que $6 \leq x \leq 7$ alors on est sûr que $5 \leq x \leq 8$?

V On considère deux nombres $a = 3\sqrt{2} - \sqrt{17}$ et $b = \sqrt{19} - 4$ que l'on va chercher à comparer.
(1) Montrer que ces deux nombres sont positifs
(2) Comparer les nombres $6\sqrt{34}$ et $8\sqrt{19}$
(3) En élevant a et b au carré et en utilisant les questions (1) et (2), expliquer pourquoi $a < b$

Module 17 (correction)

I (1) $10 > 9$ donc $\frac{1}{9} > \frac{1}{10}$ et enfin $\frac{13}{9} > \frac{13}{10}$
(2) $9 > 8$ donc $\sqrt{9} > \sqrt{8}$ c'est à dire $3 > 2\sqrt{2}$
$18 > 16$ donc $\sqrt{18} > \sqrt{16}$ c'est à dire $3\sqrt{2} > 4$ dont on déduit enfin que $-4 > -3\sqrt{2}$
(3) $a - b = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ et comme on a montré au (2) que $3 > 2\sqrt{2}$, $a - b$ est donc positif, ce qui signifie que $a > b$
(4) $49 > 48$ donc $\sqrt{49} > \sqrt{48}$, c'est à dire $7 > \sqrt{48}$, donc $-\sqrt{48} > -7$ et finalement on a $\sqrt{12} - \sqrt{48} > \sqrt{12} - 7$ (5) $(1 - 10^{-25})^2 = 1 - 2 \times 10^{-25} + (10^{-25})^2$ est donc plus grand que $1 - 2 \times 10^{-25}$ puisqu'on lui a rajouté $(10^{-25})^2$ qui est positif

II $A < 16850m^2$ et $l > 130m$, donc $\frac{1}{l} < \frac{1}{130}$ et donc $L = \frac{A}{l} < \frac{16850}{130} = 129,6$
La longueur L serait donc forcément plus petite que la largeur l et l'énoncé est donc contradictoire.

III $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ est donc plus grand que $a + b$ car $2\sqrt{a}\sqrt{b}$ est positif.
Donc comme $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq a + b$ et que a et b sont positifs on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

IV Module Vrai ou faux ?
(1) Vrai, x étant plus grand que 2, qui lui même est plus grand que 0 on a donc bien $0 \leq x$
(2) Si on prend $x = 12$, on a bien $x \leq 13$ mais pas $x \leq 10$ donc c'est faux
(3) Si on prend $x = 4$, ce nombre vérifie bien l'hypothèse $3 \leq x \leq 7$ mais ne vérifie pourtant pas $5 \leq x \leq 8$ donc là encore c'est faux
(4) Vrai car $5 \leq 6 \leq x \leq 7 \leq 8$

V (1) $18 > 17$ donc $\sqrt{18} > \sqrt{17}$ c'est à dire $3\sqrt{2} > \sqrt{17}$ ce qui signifie que $a > 0$
De même, $19 > 16$ donc $\sqrt{19} > \sqrt{16}$, c'est à dire $\sqrt{19} > 4$ et donc $b > 0$
(2) $(6\sqrt{34})^2 = 1224$ et $(8\sqrt{19})^2 = 1216$ donc $6\sqrt{34} > 8\sqrt{19}$
(3) $a^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{17})^2 = 18 + 17 - 6\sqrt{34} = 35 - 6\sqrt{34}$
$b^2 = (\sqrt{19} - 4)^2 = 19 + 16 - 8\sqrt{19} = 35 - 8\sqrt{19}$
D'après le (2) on a $6\sqrt{34} > 8\sqrt{19}$ donc $-6\sqrt{34} < -8\sqrt{19}$ et par conséquent $35 - 6\sqrt{34} < 35 - 8\sqrt{19}$
On a donc obtenu que $a^2 < b^2$ et comme a et b sont positifs d'après le (1) on peut affirmer que $a < b$

Module 18 (Ordre des nombres)

I (1) Soit $a = -2$ et $b = 3$, placer sur un axe horizontal gradué les nombres a, b, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$
La règle $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ est elle vraie ici ?

(2) Soit $a = -4$ et $b = -1$, placer sur un axe horizontal gradué les nombres a, b, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$
La règle $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ est elle vraie ici ?

(3) A partir du (1) et du (2), expliquer dans quelle(s) condition(s) sur les nombres a et b on peut appliquer la règle $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$?
A partir de la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, quelle(s) propriété(s) géométrique(s) de cette courbe permet de justifier dans quelle condition on peut appliquer cette règle? (on ne demande pas de tracer la courbe, en tout cas pas de façon précise)

II (1) Soit $a = -3$ et $b = 2$, placer sur un axe horizontal gradué les nombres a, b, a^2 et b^2
La règle $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ est elle vraie ici ?

(2) Soit $a = -4$ et $b = -1$, placer sur un axe horizontal gradué les nombres a, b, a^2 et b^2
La règle $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$ est elle vraie ici ?

(3) A partir du (1) et du (2), expliquer dans quelle(s) condition(s) sur les nombres a et b on peut appliquer la règle $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ et quand on peut appliquer la règle $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$?
A partir de la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$, quelle(s) propriété(s) géométrique(s) de cette courbe permet de justifier dans quelle condition on peut appliquer ces règles?

III Si on a $3 < L < 5$ et $-2 < x < -1$, donner un encadrement de $-x$, de $\frac{1}{x}$, de x^2, de Lx et de $L + x$

IV (1) Prendre 5 valeurs différentes de x, positives et négatives et pour chaque valeur de x, calculer $|x - \sqrt{2}|$ (on donnera un résultat exact, sans approximation)
(2) A partir de ce qui a été vu en cours sur la valeur absolue, on demande d'écrire combien vaut $|x-\sqrt{2}|$ suivant les valeurs de x que l'on considère (il faudra distinguer deux cas pour x, et le résultat ne doit pas faire apparaître de valeur absolue)
(3) $x \mapsto |x|$ est elle paire, impaire ou ni l'un ni l'autre?

V Démonstration des deux dernières propriétés de comparaison vues en cours.
(1) Soient $a < b$ et $c < d$, comparer $a + c$ avec $b + c$, puis comparer $c + b$ avec $d + b$
Utiliser vos deux derniers résultats pour en déduire que $a + c < b + d$
(2) Soient $0 < a < b$ et $0 < c < d$, comparer $a \times c$ avec $b \times c$, puis comparer $c \times b$ avec $d \times b$
Utiliser vos deux derniers résultats pour en déduire que $a \times c < b \times d$

Module 18 (correction)

I (1) La règle $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ est fausse ici car l'inverse d'un nombre positif est positif, l'inverse d'un nombre négatif est négatif et un nombre positif est toujours plus grand qu'un nombre négatif
(2) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ est vraie si a et b sont négatifs.
(3) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ est vraie si a et b sont de même signe. Ca veut dire que si on prend deux nombres a et b tous les deux dans $]0; +\infty[$ (ou tous les deux dans $]-\infty; 0[$) alors le plus grand des deux aura le plus petit inverse, et cela correspond au fait que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est **décroissante** sur $]0; +\infty[$ (et aussi décroissante sur $]-\infty; 0[$)

II $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ est vraie si a et b sont tous les deux dans $]0; +\infty[$ (le plus grand possède le plus grand carré) ce qui se traduit par $x \mapsto x^2$ **croissante** sur $]0; +\infty[$
Si a et b sont dans $]-\infty; 0[$, c'est $a < b \Rightarrow a^2 > b^2$ qui est vraie cette fois, et en effet $x \mapsto x^2$ est effectivement **décroissante** sur cet intervalle

III Si on a $3 < L < 5$ et $-2 < x < -1$, alors $1 < -x < 2$, donc comme les nombres sont alors positifs dans cette inégalité on a $\frac{1}{2} < \frac{1}{-x} < \frac{1}{1}$ et $1 < (-x)^2 < 4$ et $3 < L \times (-x) < 10$
Donc on a $1 < x^2 < 4$ et en prenant les opposés des deux autres inégalités on obtient $-1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$ et $-10 < Lx < -3$.
Enfin en ajoutant directement les deux inégalités de départ on obtient $1 < L + x < 4$

IV $|x - \sqrt{2}| = x - \sqrt{2}$ si $x \geq \sqrt{2}$ et
$|x - \sqrt{2}| = -(x - \sqrt{2}) = -x + \sqrt{2}$ si $x \leq \sqrt{2}$
(3) $x \mapsto |x|$ est paire, car x et -x sont à la même distance par rapport à l'origine (et donc $|x| = |-x|$)

V (1) Soient $a < b$ et $c < d$, donc $a(+c) < b(+c)$ et $c(+b) < d(+b)$
On peut regrouper ces deux dernières inégalités en une seule qui est $a + c < b + c < b + d$ et donc on on a $a + c < b + d$
Même raisonnement pour obtenir $a \times c < b \times d$ (à condition que tous les nombres soient positifs)

Module 19 (Inéquations)

I (1)Résoudre l'inéquation $x(x-2)(x+2) \leq 0$ (commencer par déterminer les intervalles sur lesquels chaque facteur est positif, puis faire un tableau de signe et enfin indiquez les solutions)

(2) On va dans cette question résoudre l'inéquation $x \leq \frac{4}{x}$

(a) En multipliant par x de chaque côté on obtient $x^2 \leq 4$. Résoudre directement $x^2 \leq 4$ en vous servant de ce que vous savez sur la fonction $x \mapsto x^2$

(b) On re-écrit l'inéquation de départ sous la forme $x - \frac{4}{x} \leq 0$, factoriser $x - \frac{4}{x}$ (mettre d'abord au même dénominateur) puis faire un tableau de signes en vous aidant de celui fait au (1)
Qu'est-ce qui change dans les solutions que vous venez d'obtenir par rapport aux solutions de l'inéquation du (1)

(3) Comparer les solutions du (2)b avec celles du (2)a. Est-ce la résolution du (2)a ou celle du (2)b qui est fausse et pourquoi?

II Résoudre par tableau de signes les inéquations suivantes:
(1) $x^2 \geq 4$
(2) $(x+1)(1-2x)(x-2) < 0$
(3) $\frac{1}{x+2} > \frac{1}{x+1}$
(4) $(x+1)(2-x) \leq x^2 - 1$

Module 19 (correction)

I (1) On obtient $S =]-\infty; -2] \cup [0; 2]$ à partir du tableau de signes
(2)a Si $x \geq 0$, $x^2 \leq 4$ implique $0 \leq x \leq 2$ et comme $x \mapsto x^2$ est paire les solutions de l'inéquation sont $x \in [-2; 2]$
(2)b $x - \frac{4}{x} = \frac{x^2-4}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x}$ Le tableau de signe est le même qu'au (1) sauf que x ne peut valoir 0 (on dit que c'est une valeur interdite et on l'indique dans le tableau à l'aide d'une double barre). On a donc ici $S =]-\infty; -2] \cup]0; 2]$ (on a exclu la valeur $x = 0$)

valeur interdite

x	- ∞		-2		0		2		∞
x		-		-	‖	+		+	
x-2		-		-	‖	-	0	+	
x+2		-	0	+	‖	+		+	
(x-2)(x+2)/x		-	0	+	‖	-	0	+	

(3) Les solutions du (2)a sont fausse car on a multiplié de chaque côté par x sans changer le sens de l'inégalité alors qu'on ne sait pas le signe de x

II (1) $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$
(2) $(x+1)(1-2x)(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1; \frac{1}{2}[\cup]2; \infty[$
(3) $\frac{x}{x+2} > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-x(x+2)}{(x+1)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1-x-2)}{(x+1)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{(x+1)(x+2)} > 0$ et le tableau de signe donne $S =]-\infty; -2[\cup]-1; 0[$
(4) $(x+1)(2-x) \leq x^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)(2-x) - (x-1)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(3-2x) \leq 0$ et le tableau de signes donne $S = [-1; \frac{3}{2}]$

Module 20 (Inititiation CABRI)

Consigne : en cas de problème de fonctionnement, ne prenez pas d'initiative et appelez moi. Ne jamais éteindre un ordinateur en appuyant sur ON sauf cas de force majeure.

Le logiciel CABRI Géomètre permet de faire des constructions géométriques, et de pouvoir déplacer les différents éléments de la figure. Cela permet de mettre en évidence des propriétés géométriques générales, moins évidentes sur le papier. Si vous construisez une perpendiculaire à une droite D, en déplacant D, l'autre droite reste perpendiculaire à D etc....
D'abord il faut lancer le programme que je vous demande de trouver dans l'ordinateur, connaissant son nom et sachant que son icone contient un triangle et un cercle.

Travail à faire dans CABRI : en cliquant sur les "boutons" carrés apparaissent des menus vous permettant de construire des objets géométriques. En cliquant sur l'icône avec une flèche, vous pouvez ensuite déplacer les éléments de votre figure les uns par rapport aux autres. En déplacant la souris sur les objets construits, un message vous indique quel objet vous êtes en train de considérer ce qui vous aidera pour les constructions. On peut aussi "gommer" les traits de construction à l'aide du menu représenté par un soleil et un nuage qui le cache.

I (1) Tracer trois segments de longeurs quelconques. à partir de ces trois segments, en utilisant l'outil compas, tracer un triangle dont les côtés ont pour longueur les trois segments de départ. Modifier les longueurs et les directions de ces segments et observez. A quelle condition concernant le plus grand segment le triangle existe t'il?
(2) Comme au module 13, placer I et J deux points quelconque qu'on ne déplacera pas ensuite. Placer un point M mobile quelconque. M' est le symétrique de M par rapport à I, et M" est le symétrique de M' par rapport à J. Quand on déplace M, comment se déplace M"? On note $\vec{u}$ le vecteur qui va de I vers J. Par quelle opération fait on passer de M à M" (en utilisant ce vecteur $\vec{u}$)?

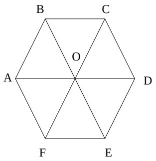
II Tracer un triangle ABC et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
(1) On translate (déplace) ABC par le vecteur $\vec{u}$, on obtient le triangle A'B'C' que l'on translate ensuite du vecteur $\vec{v}$ et on obtient le triangle A"B"C" . Par quelle translation passe t'on de ABC à A"B"C", tracer le vecteur de cette translation.
(2)Dans un des menus il y a somme de vecteurs : ajouter $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et observer à quoi correspond ce vecteur dans la question précédente.
(3) Au (1) on a déplacé ABC du vecteur $\vec{u}$, et cette fois ci on veut aller dans la direction opposée, tracer le vecteur $\vec{u}'$ correspondant au déplacement dans la direction opposée.

III ABC est un triangle rectangle en A. M est un point sur la droite (BC). I et J sont les projections orthogonales de M respectivement sur (AB) et sur (AC). Comment choisir M pour que la distance IJ soit la plus faible possible?

IV Tracer deux droites sécantes D et D' (fixes), et un point O qui n'est pas sur ces droites. Tracer 2 droites D_1 et D_2 qui passent toutes par O et qui croisent D et D' en formant un quadrilatère. On note I l'intersection des diagonales de ce quadrilatère. Si on déplace D_1 ou D_2, le point I se déplace aussi, mais pas n'importe comment....
On pourra essayer d'appliquer l'option TRACE des menus sur le point I pour "voir" que I ne se déplace pas n'importe où.

Module 21 (Vecteurs)

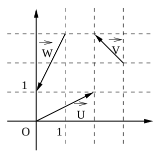
I



(1) Trouver sur la figure tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{OC}$ et tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AF}$
(2) Trouver sur la figure deux vecteurs qui valent tous les deux $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CD}$

II Dans un repère, tracer le point $A(1;1)$ et le point $B(3;2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi noté $\vec{u}$
(1) Tracer un vecteur égal à $\vec{u}+\vec{u}$. On notera ce nouveau vecteur $2\vec{u}$. Tracer ensuite un autre vecteur égal à $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$. On notera ce nouveau vecteur $3\vec{u}$
(2) Tracer un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. Ce nouveau vecteur est aussi noté $-\vec{u}$.
(3) En s'inspirant du (1) et du (2), tracer trois vecteurs égaux respectivement à $\frac{1}{2}\vec{u}$, $\frac{3}{2}\vec{u}$ et $-\sqrt{3}\,\vec{u}$

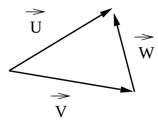
III



(1) Tracer un vecteur égal à $-2\vec{v}$
(2) tracer un vecteur égal à $\vec{v}+\vec{u}+\vec{w}$
(3) tracer un vecteur égal à $\vec{v}-\vec{u}-\vec{w}$

IV Dans un repère d'origine O on place le point $I(1;0)$ et $J(0;1)$ et on note $\vec{\imath}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath}=\overrightarrow{OJ}$
(1) Tracer le point A tel que $\overrightarrow{OA}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ et le point B tel que $\overrightarrow{OB}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$
Comparer les coordonnées de A et de B avec les nombres qui apparaissent dans les égalité précédentes.
(2) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut lui aussi s'écrire sous la forme $\overrightarrow{AB}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$
Trouver x et y. On dira alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont x et y et on note $\overrightarrow{AB}(x;y)$
Comment obtient on x et y à partir des coordonnées de A et de B?
Comment lit on les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sur la figure?
(3) (a) Tracer un vecteur égal à $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
(b) Lire les coordonnées de ce vecteur sur la figure.
(c) Calculer le vecteur $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ en revenant à la définition de ces vecteurs. Retrouver les coordonnées obtenues au (a)

V



Lequel de ces 3 vecteurs est la somme des deux autres?

VI Exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{b}$ dans les cas suivants:
(1) $\vec{a}=3\vec{\imath}$ et $\vec{b}=4\vec{\imath}$ (2) $\vec{a}=-3\vec{\imath}$ et $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{\imath}$
(3) $2\vec{a}+3\vec{b}=\vec{0}$ (4) $5\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=\vec{0}$
(5) $\vec{a}=2\vec{\imath}$ et $\vec{b}=5\vec{\imath}-\vec{a}$

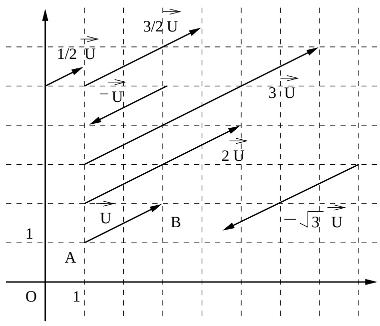
VII Simplifier les expressions suivantes:
$\vec{e}=2(\vec{\imath}+\vec{\jmath})+3(\vec{\imath}-\vec{\jmath})-3(\vec{\imath}-3\vec{\jmath})$
$\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{\imath}+\frac{1}{4}\vec{\jmath}\right)-\frac{3}{2}(3\vec{\imath}-\vec{\jmath})$
$\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{\imath}-2\vec{\jmath})+\frac{1}{4}(3\vec{\imath}-\vec{\jmath})$

VIII Tracer un triangle ABC (petit) et un autre A'B'C' tel que $(A'B')\parallel(AB)$ $(A'C')\parallel(AC)$ et $(B'C')\parallel(BC)$
(1) Comment sont les droites (AA'), (BB') et (CC')?
(2) On place un point O quelconque et A" tel que $\overrightarrow{OA''}=2\overrightarrow{OA}$, B" tel que $\overrightarrow{OB''}=2\overrightarrow{OB}$, C" tel que $\overrightarrow{OC''}=2\overrightarrow{OC}$
Comparer les triangles ABC et A"B"C"

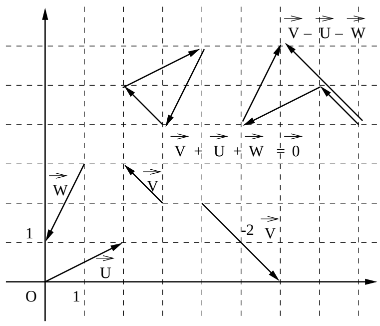
Module 21 (correction)

I (1) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{ED}$
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}$
(2) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}$

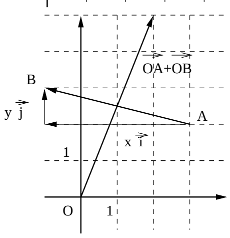
II



III



IV



(1) Ecrire $\overrightarrow{OA}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ équivaut à dire que 3 est l'abscisse de A et 2 est sont ordonnée
(2) $\overrightarrow{AB}=-4\times\vec{\imath}+1\times\vec{\jmath}$
Par un calcul sur les coordonnées on a $-4=x_B-x_A$ et $1=y_B-y_A$
(3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\vec{\imath}+5\vec{\jmath}$ Les coordonnées de ce vecteur sont donc (2;5)

V $\vec{U}=\vec{V}+\vec{W}$

VI Exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{b}$ dans les cas suivants:
(1) $\vec{a}=\frac{3}{4}\vec{b}$ (2) $\vec{a}=6\vec{b}$
(3) $2\vec{a}=-\frac{3}{2}\vec{b}$ (4) $\vec{a}=\frac{2}{15}\vec{b}$
(5) $\vec{b}=5\vec{\imath}-\vec{a}=5\vec{\imath}-2\vec{\imath}=3\vec{\imath}$ donc $\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{\imath}$

VII Simplifier les expressions suivantes:
$\vec{e}=2\vec{\imath}+8\vec{\jmath}$
$\vec{c}=-\frac{17}{4}\vec{\imath}+\frac{13}{8}\vec{\jmath}$
$\vec{b}=\frac{13}{12}\vec{\imath}-\frac{11}{12}\vec{\jmath}$

VIII (1) (AA'), (BB') et (CC') se coupent en un même point, qu'on appelle le centre de l'homothétie qui transforme ABC en A'B'C'
(2) A"B"C" a la même forme que ABC, mais avec des dimensions deux fois plus grandes. On dit qu'on a transformé ABC en A"B"C" par homothétie.

Module 22 (Vecteurs)

I Trouver les égalités où la relation de Chasles a été appliquée correctement:

(1) $\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{AM}$ (2) $\overrightarrow{KX}+\overrightarrow{TK}=\overrightarrow{TX}$
(3) $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TZ}=\overrightarrow{AZ}$ (4) $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AC}$
(5) $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$ (6) $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AC}$
(7) $\overrightarrow{FX}+\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{MF}$ (8) $5\overrightarrow{AM}-5\overrightarrow{AT}=5\overrightarrow{TM}$
(9) $3\overrightarrow{BX}-3\overrightarrow{TX}=3\overrightarrow{TB}$ (10) $2\overrightarrow{AT}+3\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TA}=3\overrightarrow{AB}$

II (1) En utilisant la relation de Chasles, exprimer les vecteurs suivants uniquement en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$
$\vec{U}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}$ $\vec{V}=2\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}$
(2) Si le point I vérifie $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ uniquement en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

III (1) Soit ABDC un parallèlogramme et P son centre. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction uniquement de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ et en déduire les coordonnées de P dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
(2) Soit un triangle ABC, et G son centre de gravité.
(a) Donner les coordonnées de I milieu de $[BC]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
(b) En déduire les coordonnées de G dans le même repère (On rappelle que le centre de gravité partage chaque médiane du triangle dans les proportions 2/3 et 1/3).
A quelle question de cette fiche avait on déjà répondu à cette question?
(c) Faire une figure représentant le triangle ABC, placer le point G à l'aide de ses coordonnées et vérifiez qu'il est bien à l'intersection des médianes.

IV Si un objet se déplace en ligne droite, sa vitesse est représentée par un vecteur dont la direction est cette ligne droite, son sens est le sens dans lequel va l'objet et sa longueur est le rapport $\frac{distance\ parcourue}{temps\ de\ parcours}$.
Un parapente se déplace cap au nord, et la vitesse de sa voile par rapport à l'air est de 40km/h
Le vent vient de l'est à 30km/h. Le soleil étant au zenith, quelle est la vitesse de l'ombre du parapente sur le sol? (on tracera le vecteur vitesse de l'ombre et on calculera sa norme)

V Prenez une page entière et tracez un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ avec O en bas à gauche de la feuille. On décrit le mouvement d'un objet en donnant pour différents temps ses coordonnées dans ce repère. On notera $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, etc les points où se trouvent l'objet aux instants $t=0$, $t=1$, $t=2$ etc.

t	0	1	2	2,5	3	4	5
x	1	3	5	6	7	8	8,5
y	0,5	1	2	2,6	3,5	5	7

t	6	7	8	9	10	11	12
x	8,5	8	7	6	5	4	3,5
y	8,5	9,5	10,5	11	11,3	11,3	11

(1) **Tracer les points** $A(t)$ et relier ces points pour tracer la trajectoire de l'objet.
(2) Entre $t=1$ et $t=3$, il s'écoule $3-1$ secondes et l'objet parcours environ la distance entre $A(1)$ et $A(3)$, sa vitesse est d'environ $\frac{dist(A(1);A(3))}{3-1}$. **Calculer cette vitesse.**
(3) Dans cette question, on tracera les vecteurs en prenant $A(3)$ comme origine.

Tracer un vecteur égal à $\frac{\overrightarrow{A(1)A(3)}}{3-1}$, puis de même, des vecteurs égaux à $\frac{\overrightarrow{A(0)A(3)}}{3-0}$, à $\frac{\overrightarrow{A(2)A(3)}}{3-2}$ et $\frac{\overrightarrow{A(4)A(3)}}{3-4}$
Y a t'il un de ces vecteurs qui est plus représentatif que les autres de la vitesse de l'objet? Peut on avoir ce vecteur vitesse de façon plus précise à partir des données de l'énoncé.
(4) **Tracer** le vecteur vitesse en $t=10$
(5) Quelle propriété géométrique particulière possède le vecteur vitesse par rapport à la courbe de la trajectoire?

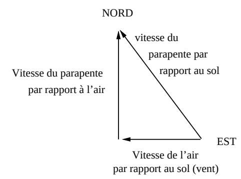
Module 22 (Correction)

I Seules la (2), la (3), la (8) et la (10) sont des applications correctes de Chasles.

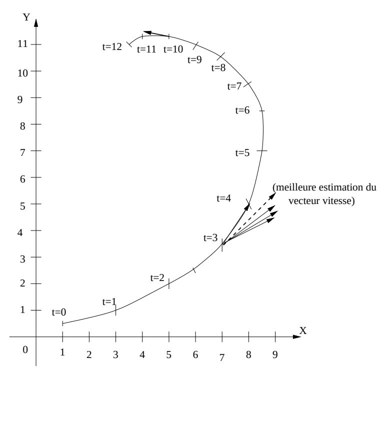
II (1) En utilisant la relation de Chasles, exprimer les vecteurs suivants uniquement en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$
$\vec{U}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}-2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ $\vec{V}=2\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=5\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}=-5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
(2) Si $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, alors $\overrightarrow{IA}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ que l'on peut re-écrire sous la forme $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

III (1) P étant au centre du parallèlogramme, il est au milieu de $[AD]$ et donc $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ Or le fait qu'on ait un parallèlogramme fait que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
En regroupant ces deux égalités on obtient $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ce qui signifie que $P(1/2;1/2)$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
(2)(a) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ et I milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ puis en remplacant et en simplifiant on obtient $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (Méthode plus simple : I est le centre d'un certain parallèlogramme, on peut alors utiliser le (1))
(b) On a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et en remplacant avec ce qu'on a obtenu au (a) on obtient $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
Les coordonnées de G sont donc $(1/3;1/3)$ dans ce repère.

IV La vitesse du parapente par rapport au sol s'obtient en ajoutant le vecteur vitesse du parapente par rapport à l'air avec celle de l'air par rapport au sol (sorte de relation de Chasles), comme indiqué sur la figure. Comme dans notre cas particulier les deux vecteurs sont orthogonaux, le triangle obtenu est rectangle et la norme de la vitesse du parapente par rapport au sol (celle aussi de son ombre) s'obtient par Pythagore $V=\sqrt{40^2+30^2}=50$ et l'ombre se déplace donc vers le nord-ouest à 50 km/h



V (3) Pour avoir un vecteur qui représente le mieux possible la vitesse au point $A(3)$ il faut tracer $\frac{\overrightarrow{A(t)A(3)}}{3-t}$ en prenant un point de la courbe $A(t)$ le plus proche possible de $A(3)$ (mais bien sûr on ne peut pas prendre $t=3$ car alors la division par $3-t$ n'existe pas puisqu'on diviserait alors par 0). Avec les données de l'énoncé on peut prendre $t=2,5$ ce qui donne le vecteur en pointillés. Si on connaissait les coordonnées des points à $t=2,9$, $t=2,99$ $t=2,999$ on pourrait tracer le vecteur vitesse de façon de plus en plus précise.
(5) Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire de l'objet



Module 23 (Géométrie Analytique / Colinéarité)

I Tracer un quadrilatère quelconque qui ne soit pas un parallélogramme et placer les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$

(1) Démontrer qu'on a $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$

(2) On rajoute comme hypothèse que $ABCD$ est un parallèlogramme. Refaire une figure, puis démontrer en utilisant les relations du (1) que C, M et N sont alignés.

II Tracer un repère en prenant $0 \leq x \leq 10$ et $0 \leq y \leq 8$. Pour chaque instant t un objet se trouve en un point $M(t)$ dont les coordonnées sont $x = t^2$ et $y = 2t$

(1) Tracer les points $M(t)$ correspondant aux temps $t = 0$; $t = 0,5$; $t = 1$; $t = 1,5$; $t = 2$; $t = 3$

Sur quel type de courbe le point $M(t)$ se trouve t'il?

(2) Pour chaque instant t on appelle $\vec{U}(t)$ le vecteur de coordonnées $(2t; 2)$, et ce vecteur est toujours tracé en prenant comme origine le point $M(t)$

Tracer les vecteurs $\vec{U}(t)$ pour les 6 points que vous avez tracé au (1). Que constate t'on de particulier entre ces vecteurs et la trajectoire du point $M(t)$

III Dans un repère on place deux points $A(-1; 2)$ et $B(3; 1)$ et deux vecteurs $\vec{U}(2; 4)$ et $\vec{V}(-1; 3)$ (on ne demande pas de faire de figure)

(1) Calculer les coordonnées de $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et de $2\vec{U} - \vec{V}$

(2) Trouver par le calcul l'ordonnée du point C d'abscisse -3 tel que $\overrightarrow{AC}$ soit colinéaire à $\vec{U}$

IV (1) Pour chaque valeur du nombre x on considère un point A de coordonnées $(-x; x-1)$. Peut on trouver un (ou plusieurs) nombre x tel que A soit aligné avec les points O et $B(2; 7)$ et si oui, quelles sont alors les coordonnés de A?

(2) Peut on trouver des valeurs du nombre x telles que les vecteurs $\vec{U}(4(x+2); 2-2x)$ et $\vec{V}(2x; 2-x)$ soient colinéaires? Si oui, donner les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans ce cas, ainsi que le nombre λ tel que $\vec{U} = \lambda\vec{V}$

V Dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ on considère les vecteurs $\vec{U}(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\vec{V}(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$

(1) Faire un figure, puis écrire les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ uniquement en fonction de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$

(2) En déduire $\vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{U} - \vec{V}$ uniquement en fonction de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$

(3) En utilisant le (2), exprimer $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ uniquement en fonction de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$

(4) Déduire du (3) les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans le repère $(O; \vec{U}; \vec{V})$

Module 23 (correction)

I (1) Comme $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$ on a $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc $\boxed{\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}}$

Comme $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ on a $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = 3\overrightarrow{AD}$ et donc $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{AD}$, or $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$ donc $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD}$ c'est à dire $\boxed{\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}}$

(2) $ABCD$ est un parallèlogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Si on utilise ces égalités dans $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$ obtenu au (1) on arrive à $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$, et en comparant cette expression avec $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ obtenu au (1) on constate que $\boxed{\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}}$

$\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont donc colinéaires ce qui implique que C, M et N sont alignés.

II (1) La courbe obtenue est une portion de parabole. En effet, comme $x = t^2$ et $y = 2t$ on a donc $x = (y/2)^2 = y^2/4$ (parabole horizontale). Si on faisaitt varier t de $-\infty$ à $+\infty$ on obtiendrait la parabole en entier.

(2) On constate que le vecteur $\vec{U}$ est toujours tangent à la courbe. Si le nombre t représentait un temps, le vecteur $\vec{U}$ représenterait le vecteur vitesse du point $M(t)$ qui se déplace sur la parabole (voir exercice V du module 22).

III (1) $\overrightarrow{AB}(4; -1)$ donc $\boxed{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,(-2; \frac{1}{2})}$

$\boxed{2\vec{U} - \vec{V}(5; 5)}$

(2) $C(-3; y)$ donc $\overrightarrow{AC}(-2; y-2)$ qui doit être colinéaire à $\vec{U}(2; 4)$ donc on doit avoir $-2 \times 4 = 2 \times (y-2)$ ce qui donne $2y = -4$ soit $\boxed{y = -2}$

IV (1) O, A et B sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA}(-x; x-1)$ et $\overrightarrow{OB}(2; 7)$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si $-x \times 7 = 2 \times (x-1)$ ce qui donne $9x = 2$ et donc $\boxed{x = 2/9}$ (on a alors $A(-2/9; -7/9)$)

(2) x doit vérifier $4(x+2)(2-x) = 2x(2-2x)$ que l'on peut aussi écrire $4(4-x^2) = 4x(1-x)$ qui équivaut à $4 - x^2 = x - x^2$ ce qui donne $\boxed{x = 4}$

On a pour cette valeur de x $\boxed{\vec{U}(24; -6)}$ et $\boxed{\vec{V}(8; -2)}$ et on a effectivement $\boxed{\vec{U} = 3\vec{V}}$

V (1) $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ $\quad \vec{V} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$

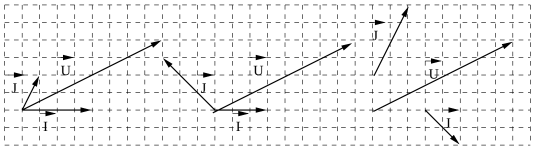
(2) $\vec{U} + \vec{V} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} = \sqrt{2}\vec{\jmath}$ $\quad \vec{U} - \vec{V} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} = \sqrt{2}\vec{\imath}$

(3) $\vec{\imath} = \frac{\vec{U}-\vec{V}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{U} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}$ $\quad \vec{\jmath} = \frac{\vec{U}+\vec{V}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{U} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}$

(4) Le (3) permet de dire que $\boxed{\vec{\imath}(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})}$ et $\boxed{\vec{\jmath}(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})}$ dans le repère $\boxed{(O; \vec{U}; \vec{V})}$

Module 24 (Géom. Analytique)

I Le vecteur $\vec{U}$ est représenté dans trois “repères” différents définis respectivement par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ pour les abscisses et les ordonnées. Lire sur le graphique dans les 3 situations les coordonnées de $\vec{U}$ dans chacun de ces 3 “repères” différents.



II Dans un repère orthonormé, tracer les points $A(0;3)$, $B(-1;-1)$ et $C(4;2)$, et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

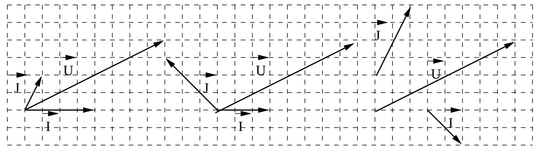
III Soit $\vec{U}(5;7)$ dans un repère orthonormé. Trouver deux nombres x et y pour que $\vec{V}(x;y)$ soit orthogonal à $\vec{U}$

IV Dans un repère orthonormé, tracer les points $A(-7/2;2)$, $B(-2;5)$, $C(5;13/2)$ et $D(3/2;-1/2)$
(1) Démontrer que ABCD est un trapèze rectangle.
(2) Calculer l'aire du trapèze ABCD

V Dans chacun des cas suivant on demande de trouver les valeurs éventuelles de x pour lesquelles $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux, puis pour chaque valeur de x qui convient, de faire une figure représentant $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (en indiquant sur chaque figure la valeur de x obtenue).
(1) $\vec{U}(x;1-x)$ et $\vec{V}(2;3)$ (2) $\vec{U}(1+x;1)$ et $\vec{V}(1-x;3)$
(3) $\vec{U}\left(\frac{2}{x+1};1\right)$ et $\vec{V}(-1;2)$ (4) $\vec{U}\left(x;\frac{1}{x}\right)$ et $\vec{V}(1;-1)$

Module 24 (Géom. Analytique)

I Le vecteur $\vec{U}$ est représenté dans trois “repères” différents définis respectivement par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ pour les abscisses et les ordonnées. Lire sur le graphique dans les 3 situations les coordonnées de $\vec{U}$ dans chacun de ces 3 “repères” différents.



II Dans un repère orthonormé, tracer les points $A(0;3)$, $B(-1;-1)$ et $C(4;2)$, et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

III Soit $\vec{U}(5;7)$ dans un repère orthonormé. Trouver deux nombres x et y pour que $\vec{V}(x;y)$ soit orthogonal à $\vec{U}$

IV Dans un repère orthonormé, tracer les points $A(-7/2;2)$, $B(-2;5)$, $C(5;13/2)$ et $D(3/2;-1/2)$
(1) Démontrer que ABCD est un trapèze rectangle.
(2) Calculer l'aire du trapèze ABCD

V Dans chacun des cas suivant on demande de trouver les valeurs éventuelles de x pour lesquelles $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux, puis pour chaque valeur de x qui convient, de faire une figure représentant $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (en indiquant sur chaque figure la valeur de x obtenue).
(1) $\vec{U}(x;1-x)$ et $\vec{V}(2;3)$ (2) $\vec{U}(1+x;1)$ et $\vec{V}(1-x;3)$
(3) $\vec{U}\left(\frac{2}{x+1};1\right)$ et $\vec{V}(-1;2)$ (4) $\vec{U}\left(x;\frac{1}{x}\right)$ et $\vec{V}(1;-1)$

Module 24 (correction)

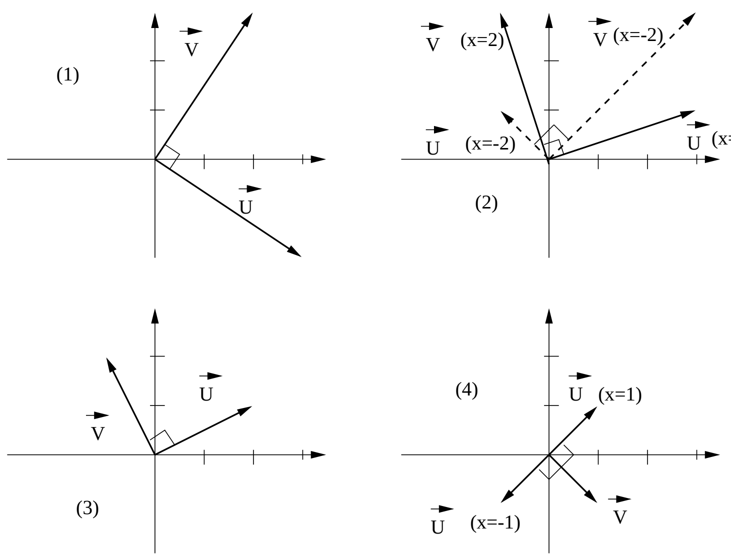
I Figure de gauche : $\vec{U}(1,5;2)$
Figure centrale : $\vec{U}(4;4/3)$
Figure de droite : $\vec{U}(2;2)$

II $\overrightarrow{AB}(-1;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(4;-1)$ et en appliquant le critère d'orthogonalité on a $-1\times 4+(-4)\times(-1)=-4+4=0$ donc le triangle est rectangle en A. De plus $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$ et $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$ donc le triangle est aussi isocèle.

III x et y doivent être tels que $5x+7y=0$ (critère d'orthogonalité). On peut donc prendre par exemple $x=7$ et $y=-5$ (il y a une infinité de solutions possibles).

IV $\overrightarrow{AB}(3/2;3)$ et $\overrightarrow{CD}(-7/2;-7)$ donc $\overrightarrow{CD}=-7/3\overrightarrow{AB}$ et comme ces deux vecteurs sont colinéaires on a $(AB)\parallel(CD)$. De plus $\overrightarrow{AD}(5;-5/2)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ car le critère d'orthogonalité est vérifié $\frac{3}{2}\times 5+3\times\frac{-5}{2}=0$
On a donc bien un trapèze rectangle. Sont aire est donné par le produit de la hauteur par la moyenne des deux bases. La base AB a pour longueur $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ et $CD=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+7^2}=\frac{7}{2}\sqrt{5}$ (leur moyenne vaut donc $\frac{5}{2}\sqrt{5}$) et la hauteur vaut $AD=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{5}$
L'aire vaut donc $\frac{5}{2}\sqrt{5}\times\frac{5}{2}\sqrt{5}=\frac{125}{4}$

V (1) x doit vérifier $2x+3(1-x)=0$, c'est à dire $3-x=0$ et donc $x=3$ (on a alors $\vec{U}(3;-2)$)
(2) $(1+x)(1-x)+3=0$ c'est à dire $4-x^2=0$ donc $x=2$ ou $x=-2$
Pour $x=2$ on a $\vec{U}(3;1)$ et $\vec{V}(-1;3)$ et pour $x=-2$ on a $\vec{U}(-1;1)$ et $\vec{V}(3;3)$
(3) $\frac{-2}{x+1}+2=0$ donc $\frac{-2+2(x+1)}{x+1}=0$ et donc on obtient $x=0$ (on a alors $\vec{U}(2;1)$)
(4) $x-\frac{1}{x}=0$ donc $\frac{x^2-1}{x}=0$ ou encore $\frac{(x-1)(x+1)}{x}=0$ ce qui donne $x=1$ ou $x=-1$
Pour $x=1$ on a $\vec{U}(1;1)$ et pour $x=-1$ on a $\vec{U}(-1;-1)$



Module 25 (Révisions DS commun)

I (1) Soit $x = 0,002$. Ecrire en notation scientifique les 3 nombres x, x^5 et x^{-3}
(2) Ecrire sous la forme $a^p \times b^q$ (p et q sont des entiers relatifs) les expressions suivantes : $\dfrac{a^3b^{-2}}{a^4b^{-3}}$ $\quad (a^{-2}b^3)^{-2}$ $\quad \sqrt{a^4b^6}$
(3) donner une valeur approchée à 10^{-3} près par excès de $\sqrt{2}$.

II On note N le nombre de frère et soeurs de chaque élève d'une classe de 30 élèves. Après un sondage on obtient la répartition suivante:

N	0	1	2	3	4	5
Effectifs	5	7	10	4	2	2

(1) Calculer la moyenne et l'écart type de N
(2) Faire un histogramme en regroupant les classes $N = 3$, $N = 4$ et $N = 5$ en une seule classe et en laissant les autres classes tel quel.

III (1) Résoudre les équations suivantes :
$4x^5 - 9x^3 = 0 \qquad (2x-1)^2 - 4 = 0 \qquad \frac{x^2-4x+1}{x^2-1} = 1$
Résoudre les inéquations suivantes :
$2x - 7 < 2(x-3) + x$
$\left(\frac{2x-3}{2}\right)\left(\frac{x-1}{3}\right) < \left(\frac{3x-5}{4}\right)\left(\frac{4x}{9} - 1\right)$
$\frac{9(x+1)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+4} \geq 0$

IV (1)Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 - \sqrt{x} \leq 2x - 1$ (on pourra se limiter à $0 \leq x \leq 3$ et on fera un graphique précis)
(2) Donner le tableau de variations de $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ (on pourra donner des valeurs approchées pour les nombres qui doivent intervenir dans ce tableau).
(3) Donner l'image par f de 4 et le(s) antécédent(s) de 0 par f.

V Les fonctions suivantes sont elles paires, impaires ou ni l'un ni l'autre?
$f(x) = (2x^2 - 3)x^3 \qquad g(x) = (2x-1)(2x+1) + 1$
$h(x) = x - \frac{1}{x} \qquad i(x) = (x+3)(x-3) - x$

VI Soient 3 nombres a, b, c tels que $a = b + c$ et $c > 0$ (a est donc plus grand que b). On va démontrer qu'en fait $a = b$! Multiplions l'égalité $a = b + c$ par $a - b$, on obtient: $a(a-b) = (b+c)(a-b)$ donc en développant $a^2 - ab = ba + ca - bc - b^2$ donc $a^2 - ab - ca = ba - b^2 - bc$ et chaque membre se factorise en $a(a-b-c) = b(a-b-c)$ On peut alors simplifier par $(a-b-c)$ et on obtient $a = b$! Où est l'erreur?

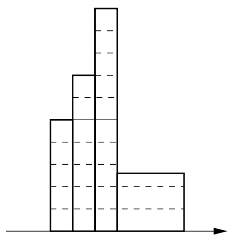
VII Sur mars cohabitent les hommes bleus et les hommes verts. 95% des bleus sont pauvres et 95% des pauvres sont bleus. Y a t'il une inégalité sociale due à la race?
(indication : entre quelles valeurs peut varier la proportion des verts qui sont pauvres. On ne cherchera pas à trouver une valeur précise de N_V pour que la proportion de pauvre soit la même chez les bleus et chez les verts.)

Module 25 (correction)

I (1) $x = 2 \times 10^{-3}$; $x^5 = 3,2 \times 10^{-14}$; $x^{-3} = 1,25 \times 10^8$
(2) $\dfrac{a^3b^{-2}}{a^4b^{-3}} = a^{-1}b^1 = a^{-1}b$; $(a^{-2}b^3)^{-2} = a^4b^{-6}$; $\sqrt{a^4b^6} = a^2b^3$
(3) $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,415 - 1,414 = 10^{-3}$, donc $1,415$ est une valeur approchée à 10^{-3} près par excès de $\sqrt{2}$

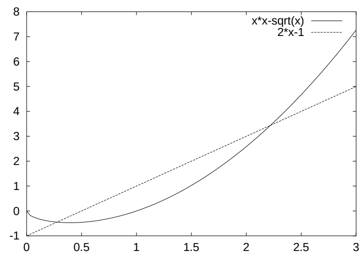
II (1) $\bar{N} = 1,9$ et $\sigma_N \simeq 1,37$

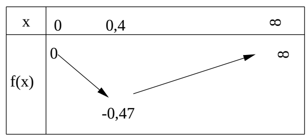
(2) Pour la dernière colonne l'aire doit être égale à l'effectif qui est de 8 et la largeur de la colonne est 3 puisque on a regroupé 3 classes, donc sa hauteur doit être 8/3



III (1) $4x^5 - 9x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(2x-3)(2x+3) = 0$ donc $S = \{0; -3/2; 3/2\}$
$(2x-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow ((2x-1)-2)((2x-1)+2) = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+1) = 0$ donc $S = \{-1/2; 3/2\}$
$\frac{x^2-4x+1}{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+1}{x^2-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+1-(x^2-1)}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+2}{x^2-1} = 0$ donc $x = 1/2$ et cette valeur n'annule pas le dénominateur, donc $S = \{2\}$
Résoudre les inéquations suivantes :
$2x - 7 < 2(x-3) + x \Leftrightarrow 0 < x + 1$ donc $S =]-1; +\infty[$
$\left(\frac{2x-3}{2}\right)\left(\frac{x-1}{3}\right) < \left(\frac{3x-5}{4}\right)\left(\frac{4x}{9} - 1\right)$
En développant on obtient $\frac{17x}{36} < \frac{3}{4}$ et donc $x < \frac{27}{17}$ $S =]-\infty; \frac{27}{17}]$
$\frac{9(x+1)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+4} \geq 0$ se factorise en $\frac{(2x+1)(4x+5)}{(x-2)^2} \geq 0$ et comme le dénominateur est positif on doit résoudre $(2x+1)(4x+5) \geq 0$ et le tableau de signe donne $S =]-\infty; -5/4] \cup [-1/2; +\infty[$ et on doit retirer de cet ensemble $x = 2$ qui annule le dénominateur.

IV (1) $S = [0,28; 2,21]$ (voir courbes ci-dessous)





(3) l'image de 4 vaut $f(4) = 15$; les antécédent(s) de 0 sont 0 et 1 car $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$

V f est impaire, g est paire, h impaire et i est ni l'un ni l'autre.

VI A la fin on simplifie par $(a-b-c)$ mais $a - b - c = 0$ car on a posé $a = b + c$, or diviser par 0 n'a pas de sens et c'est là l'erreur.

VII Rien n'est dit dans l'énoncé sur N_V, il se peut donc que tous les verts soient pauvres, ou à l'inverse que la proportion de pauvres chez les verts soit négligeable. Cette proportion varie donc de 0 à 100%, donc il est tout à fait possible que la proportion de pauvres soit identique chez les verts et chez les bleus. L'énoncé permet d'écrire que $P_V = 0,05N_B$ donc $P_V/N_V = 0,05N_B/N_V$ et si $N_V = \frac{0,05}{0,95}N_B$, cette proportion de pauvres est effectivement la même.

Module 26 (Droites du plan)

I (1) Trouver l'équation de la droite passant par $A(5;4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{U}(-1;-2)$
(2) Trouver l'équation de la droite passant par $A(5;4)$ qui est perpendiculaire à la droite du (1).
(3) Trouver le nombre m pour que les droites d'équation $y=2mx+1$ et $y=x+1$ soient perpendiculaires.
(4) Idem (3) avec $mx-y+2=0$ et $3x+5y-7=0$

II(1) Soit D la droite d'équation $y=ax$ et D' la droite d'équation $y=a'x$. On considère le point A sur D d'abscisse 1 et A' sur D' lui aussi d'abscisse 1. Les deux droites sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont orthogonaux. En déduire la relation vue en cours que doivent vérifier a et a'.
(2) Cette fois ci D et D' ont pour équation $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$ Rédiger un raisonnement géométrique pour démontrer que D et D' sont perpendiculaires si et seulement si la relation obtenue au (1) est vérifiée.

III Trouver les coordonnées de l'intersection éventuelle des droites suivantes (on commencera par faire les calculs et seulement ensuite on fera une figure)
(1) $y=2x+1$ et $y=-3x+2$
(2) $y=\frac{14}{3}x+3$ et $y=\frac{42}{9}x-5$
(3) $y+2x-2=0$ et $2y-x-2=0$
(4) $5x-2y-4=0$ et $-2,5x+y+2=0$

IV Dans un repère on considère la liste de points suivante:
$A_0(-1;2)$ $A_1(8;1)$ $A_2(7;3)$ $A_3(5;5)$ $A_4(6;1)$ $A_5(4;2)$ $A_6(-1;1)$ $A_7(1;1)$ $A_8(1;5)$ $A_9(5;6)$ $A_{10}(-1;4)$ $A_{11}(-2;5)$
(1) Sur une figure, placer tous ces points en les tracant d'une certaine couleur si $7y+2x-26\geq 0$ et d'une autre couleur si $7y+2x-26\leq 0$
(2) Hachurer la région du plan où se trouvent tous les points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient $7y+2x-26\leq 0$ (on dit alors qu'on a résolu cette inéquation a deux inconnues)
(3) Repasser avec une troisième couleur sur les points de la liste qui vérifient $2x-3y+6\geq 0$ et avec une quatrième couleur les points qui vérifient $2x-3y+6\leq 0$
(4) Résoudre le système d'inéquations $\begin{cases} 7y+2x-26\leq 0 \\ 2x-3y+6\geq 0\end{cases}$
en hachurant partout où un point $M(x;y)$ a ses coordonnées qui vérifient le système.

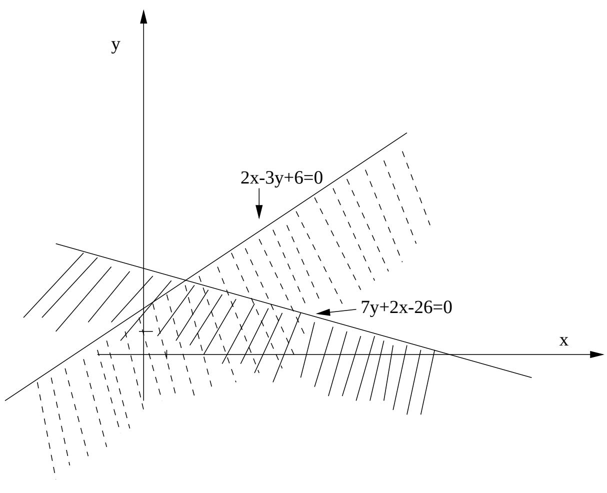
Module 26 (correction)

I (1) Un point M de coordonnées x et y sera sur la droite si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{U}$. $\overrightarrow{AM}(x-5;y-4)$ et $\vec{U}(-1;-2)$, et les produits en croix doivent donc être égaux ce qui donne $-2\times(x-5)=-1\times(y-4)$ et en simplifiant on obtient $\boxed{y=2x-6}$
(2) Une droite perpendiculaire à celle du (1) doit avoir pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ car le produit des deux coefficient directeurs doit faire -1 et on a bien $-\frac{1}{2}\times 2=-1$
Il reste a déterminer son ordonnée à l'origine notée b.
Comme cette 2^e droite passe aussi par $A(5;4)$ on doit donc avoir $4=-\frac{1}{2}\times 5+b$ et donc $b=13/2$ et l'equation de cette droite est finalement $y=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$
(3) m doit vérifier $2m\times 1=-1$ pour que les droites soient perpendiculaires, donc $m=-1/2$.
(4) $mx-y+2=0 \Leftrightarrow y=mx+2$ et $3x+5y-7=0 \Leftrightarrow y=-\frac{3x-7}{5}$ et on doit donc avoir $m\times\frac{-3}{5}=-1$ et donc $m=\frac{5}{3}$

II(1) On cherche a démontrer la propriété du cours $\boxed{aa'=-1}$
$A(1;y)$ est sur la droite d'équation $y=ax$ donc $y=a\times 1=a$ et donc $A(1;a)$, de même $A'(1;a')$ donc $\overrightarrow{OA}(1;a)$ et $\overrightarrow{OA'}(1;a')$ car les coordonnées du point O sont nulles (origine). Ces deux vecteurs sont orthogonaux donc leurs coordonnées doivent vérifier $1\times 1+a\times a'=0$ ce qui donne bien $aa'=-1$
(2) Cette fois ci D et D' ont pour équation $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$ (elles ne passent plus par l'origine)
La droite $y=ax$ est parallèle à D car elles ont le même coefficient directeur. De même, $y=a'x$ est parallèle à D'
Donc D et D' seront perpendiculaires si et seulement si $y=ax$ et $y=a'x$ sont perpendiculaires. On peut alors appliquer le (1) à ces deux dernières droites et on a bien dans tous les cas $aa'=-1$ pour deux droites perpendiculaires.

III (1) $2x+1=-3x+2$ donc $x=1/5$ et $y=7/5$
(2) Pas de solutions (droites parallèles $\frac{14}{3}=\frac{42}{9}$ et non confondues)
(3) $x=2/5$ et $y=6/5$
(4) Les deux équations correspondent à la même droite. Leur intersection est donc la droite en entier.

IV (4) Les solutions du système sont situées dans la région qui est hachurée des deux manières.



Module 27 (Droites et systèmes)

I Un wagon transporte 2 types de containers. Les containers de type A et ceux de type B ont les mêmes dimensions et le wagon ne peut en contenir plus que 8. Ceux de type A pèsent 1 tonne et ceux de type B pèsent 3 tonnes. Le wagon ne peut supporter plus de 15 tonnes de marchandises. De plus il n'est pas rentable de transporter moins de 1 container de type A ni de transporter moins de 2 containers de type B. On va chercher quelles sont les combinaisons possibles de containers de types A ou B. On notera donc x le nombre de containers A et y le nombre de containers B sur le wagon.
Ce problème se résume en un système de 4 inéquations à 2 inconnues (x et y).

(1) Deux des 4 inéquations sont $I_1 : x + y \leq 8$ et $I_2 : y \geq 2$. Justifier ces deux inéquations à partir de ce qui est écrit dans l'énoncé.
(2) Etablir les deux inéquations qui manquent.
(3) Résoudre graphiquement ce système d'inéquations (c'est à dire hachurer la région où se trouvent les points dont les coordonnées x et y vérifient le système). On repassera ensuite sur chaque solution et on donnera le nombre de combinaisons possibles.

II Résoudre graphiquement les systèmes suivants:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} 3y + 5x - 15 < 0 \\ 2y + x - 4 > 0 \\ y - x - 1 > 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} y - x - 1 < 0 \\ y + 2x - 4 \geq 0 \\ 3y + x - 3 > 0 \end{array} \right.$$

III Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient simultanément les deux conditions suvantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} y < 3x - 3 \\ 3y - x - 3 = 0 \end{array} \right.$$

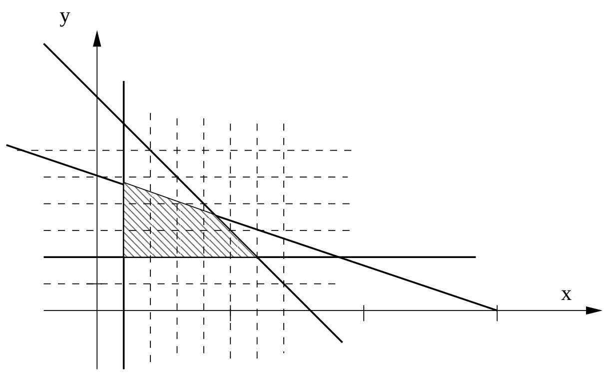
IV Résoudre les systèmes suivants (par le calcul):

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} 7x + y + 2 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + 1 = 0 \\ x - \frac{y}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{array} \right.$$

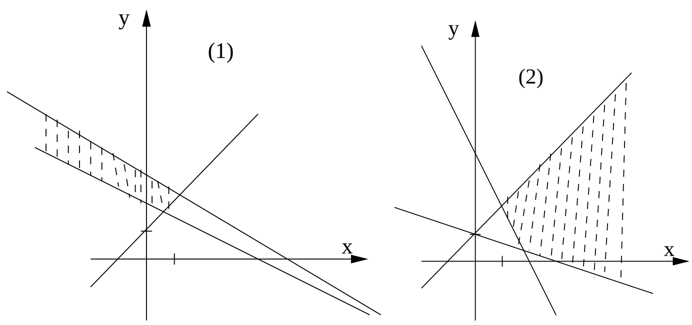
$$(3) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 5x - y + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Module 27 (correction)

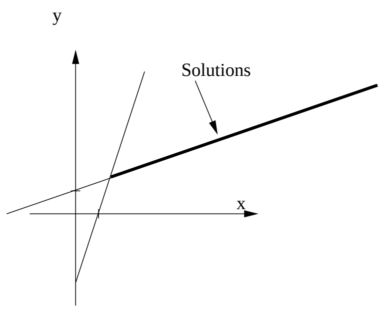
I(1) $I_1 \ : x + y \leq 8$ car le wagon ne peut contenir plus que 8 containers. $I_2 \ : y \geq 2$ car il n'est pas rentable de transporter moins de 2 containers de type B.
(2) $I_3 \ : x \geq 1$ car il n'est pas rentable de transporter moins de 1 containers de type A et on a aussi $I_4 \ : x + 3y \leq 16$ car le poids total en tonnes sur le wagon vaut $x + 3y$ et ne doit pas dépasser 16 tonnes.
(3) Les valeurs de x et y doivent être des nombres entiers et les points correspondant de coordonnées x et y doivent se trouver dans la région hachurée. On dénombre 14 points possibles à coordonnées entieres dans cette région (intersections des lignes du quadrillage ajouté sur la figure). On peut donc charger le wagon de 14 façons différentes.



II



III



IV
(1) $x = 1/2$ et $y = -11/2$
(2) Les deux droites sont parallèles mais non confondues, l'intersection est vide (S=$\emptyset$)
(3) $x = -3/13$ et $y = 11/13$

Module 28 (CABRI)

Utilisation de CABRI : en cliquant sur les “boutons” carrés apparaissent des menus vous permettant de construire des objets géométriques. En cliquant sur l’icône avec une flèche, vous pouvez ensuite déplacer les éléments de votre figure les uns par rapport aux autres. En déplacant la souris sur les objets construits, un message vous indique quel objet vous êtes en train de considérer ce qui vous aidera pour les constructions. Penser à “gommer” les traits de construction au fur et à mesure, à l’aide du menu représenté par un soleil et un nuage qui le cache.

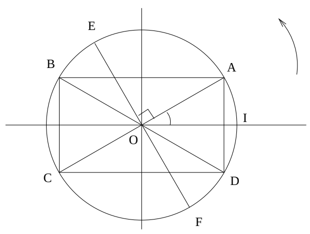
I Tracer deux cercles (centres O et O’) sécants (on note A et I les points d’intersection)
$[AC]$ est un diamètre du premier cercle et la droite (AC) coupe le deuxième cercle en D.
$[AB]$ est un diamètre du deuxième cercle et la droite (AB) coupe le premier cercle en E.
Les droites (BD), (CE) et (AI) on elles une particularité et laquelle ? Essayer de la justifier en vous servant des configurations connues dans les triangles.

II Construire un cercle de centre O puis 3 points A, B et M sur ce cercle, puis tracer les segments $[AM]$ $[BM]$, $[AO]$ et $[BO]$.
En vous servant des outils dans les menus, faites afficher l’angle $\widehat{AMB}$ puis l’angle $\widehat{AOB}$.
Déplacer le point M sur le cercle. Comment varient les 2 angles?
Déplacer maintenant le point B sur le cercle. Comment varient les 2 angles, quelle relation y a t’il entre les deux?
Si on ajoute un quatrième point N sur le cercle, que peut on dire des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$?

III (1) Construire un triangle ABC rectangle en B (on rappelle que le triangle ne doit pas juste être “visuellement” rectangle. Si on déplace un seul des sommets du triangle, celui-ci doit rester rectangle)
(2) Construire dans votre triangle rectangle un carré EFGH tel que E soit sur le segment $[AC]$, et tel que F et G soient sur le segment $[AB]$. Malgré toutes ces conditions, on peut encore “bouger” le carré à l’intérieur du triangle. Comment se déplace alors le point H?
(3) On voudrais en plus que le sommet H du carré soit sur le segment $[BC]$. On peut le faire approximativement en déplacant le carré comme on a fait au (2), mais on veut ici une construction exacte. En utilisant le carré tel que vous l’avez construit au (2), trouver une méthode pour construire le sommet H’ sur $[BC]$ d’un carré E’F’G’H’ plus grand qui vérifie toutes les conditions voulues.

IV Tracer deux axes perpendiculaires D et D’ (on notera O leur intersection), et un triangle (petit) ABC rectangle en B dont les longueurs seront fixés, et tel que A soit sur D, et C soit sur D’. lorsqu’on déplace le point A sur D, l’équerre doit bouger en entier sans se déformer. En déplacant l’équerre de cette façon, le point B bouge. Quelle semble être la trajectoire du point B? Utiliser l’outil LIEU ou TRACE dans les menus pour déterminer cette trajectoire.
Démontrer géométriquement votre constatation (montrer que l’angle $\widehat{BOA}$ est égal à un des angles de l’équerre, en se servant de ce qui a été constaté à l’exercice II).

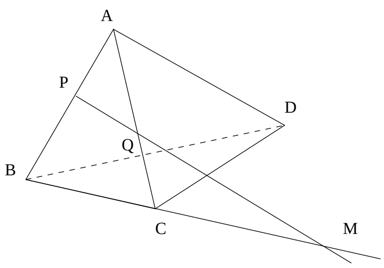
Module 29 (Trigo+géom. espace)



I ABCD est un rectangle quelconque inscrit dans le cercle trigonométrique (c’est à dire cercle de rayon 1, orienté dans le sens positif), et on appelle θ une des mesures de l’angle $\widehat{IOA}$. Dans cet exercice on exprimera tous les angles en radians. $\cos(\theta)$ est par définition l’abscisse de A, $\sin(\theta)$ est son ordonnée.
(a) Exprimer les angles orientés $\widehat{IOB}$, $\widehat{IOC}$, $\widehat{IOD}$, $\widehat{IOE}$ et $\widehat{IOF}$ en fonction de θ.
(b) En déduire les expressions de $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\cos(\pi/2+\theta)$, $\sin(\pi/2+\theta)$, $\cos(\theta-\pi/2)$, $\sin(\theta-\pi/2)$, $\cos(\pi-\theta)$, $\sin(\pi-\theta)$, $\cos(\pi+\theta)$ et $\sin(\pi+\theta)$ en fonction uniquement de $\cos(\theta)$ ou de $\sin(\theta)$.
(c) Montrer en utilisant le (b) que $\cos(\pi/2-\theta) = \cos(\theta-\pi/2)$ et que $\sin(\pi/2-\theta) = -\sin(\theta-\pi/2)$
(e) Donner sous la forme d’une fraction d’entiers multiplié par π la mesure principale de l’angle $653\pi/7$

II Sur la fiche qui va avec ce sujet, vous avez le patron d’un cube, d’un trétraèdre et de 4 pyramides.
(a) Construire les solides et montrez que le trétraèdre plus les 4 pyramides remplissent exactement le cube.
(b) On note L le coté du cube. Sachant que le volume d’une pyramide vaut $base \times hauteur/3$, et en choisissant astucieusement la base, donner le volume des pyramides, puis en déduire le volume du tétraèdre.

III Dans le plan du triangle ABC, les droites (PQ) et (BC) se coupent en M. Tracer l’intersection du plan (PMD) avec le plan (ACD), puis tracer l’intersection du plan (BCD) avec le plan PQD.



IV Dans un tétraèdre quelconque, on joint les milieux des arètes opposées. Démontrer qu’elles sont concourantes (indication : faites une figure, puis en utilisant le théorème des milieux dans un triangle, déterminer les droites qui doivent être parallèles).

V Soit ABCD un tétraèdre régulier (les 4 arètes ont même longueur). Démontrer que deux arètes opposées sont orthogonales.
Rappels : • deux droites D_1 et D_2 sont dites orthogonales ssi on peut trouver une parallèle à D_2 qui soit à la fois dans le même plan que D_1 et perpendiculaire à D_1.
• Une droite D est orthogonale à un plan P ssi D est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans P.
• On démontre que l’ensemble des points M qui se trouvent à égale distance de deux points A et B forme un plan. On appelle ce plan le **plan médiateur** du segment $[A, B]$. Ce plan est orthogonal à (AB) et passe par le milieu de (AB).

DS01 du 27/09/1999

Pensez à toujours justifier vos réponses de façon claire. La notation en tiendra compte.
Barême provisoire : (I sur 5; II sur 5; III sur 6; IV sur 4).

I Les statistiques sur vos tailles ont donné les renseignements suivants:

classe	1	2	3	4	5	6	7	8
filles	1	2	9	4	4	1	0	0
garçons	1	1	0	1	2	1	2	1

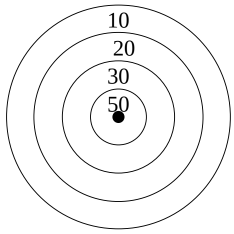
On regroupe les 8 classes en seulement 2 grandes classes. La première notée C_1 regroupe les classes 1,2,3 et 4. La classe C_2 regroupe les classes 5,6,7 et 8.

(a) Faire deux histogrammes (un pour les filles et un pour les garcons) faisant intervenir seulement ces deux classes C_1 et C_2. Notez dans chaque colonne la fréquence (en %) correspondant à cette colonne (on arrondira au pourcent près).
(b) La classe C_1 correspond à une taille moyenne de $1m60$, et C_2 à une taille moyenne de $1m80$. Calculez la taille moyenne des filles et celle des garçons en utilisant les résultats de la question (a), **et en détaillant le calcul que vous effectuez**.

III Reproduire sur votre feuille et completer le tableau suivant :

classe	A	B	C	D	E	Total
effectif	36		33		51	240
fréquence (%)		22,5				

III



Deux tireurs à l'arc X et Y s'affrontent dans une compétition comportant 20 tirs sur cible. Leurs résultats sont les suivants :

score	50	30	20	10	0
X	4	6	5	4	1
Y	6	3	5	3	3

(a) Calculez la moyenne des points de X et celle de Y. Peut on départager X et Y à partir de ces moyennes?
(b) Calculez pour X et pour Y la **variance et l'écart type** de leurs séries de points respectives (pour cela on pourra s'aider d'un tableau dans lequel on indiquera pour chaque score le nombre $(score - moyenne)^2$.

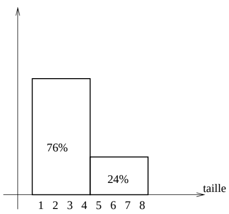
IV Pub: “Journée promotion : 20% de remise sur tous les articles. Votre billet de 100F vaut 120F”. Où est l'erreur?

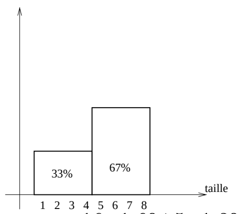
Correction du DS 01 du 27/09

Barême effectif : (I sur 6; II sur 6; III sur 6; IV sur 2).

I (Remarque : les effectifs donnés pour les garçons dans l'énoncé sont différents de ceux vus en cours. C'est une faute de frappe qui n'empèche pas de résoudre l'exercice).

classe	$C_1 = \{1;2;3;4\}$	$C_2 = \{5;6;7;8\}$	total
eff. filles	16	5	21
fréq. filles	$\frac{16}{21} \simeq 76\%$	$\frac{5}{21} \simeq 24\%$	100%
eff. garçons	3	6	9
fréq. garçons	$\frac{3}{9} \simeq 33\%$	$\frac{6}{9} \simeq 67\%$	100%





(b) taille moyenne des filles : $\frac{16 \times 1,60 + 5 \times 1,80}{21} \simeq 1,65\ m$
taille moyenne des garçons : $\frac{3 \times 1,60 + 6 \times 1,80}{9} \simeq 1,73\ m$

II L'effectif en B est $22,5\%$ du total (240) soit $22,5 \times 240/100 = 54$. Il manque l'effectif en D qu'on obtient en retranchant ceux de A,B,C et D du total (240) et il reste donc 66 en D. Les rapports $\frac{effectif}{effectif\ \ total}$ donnent les autres fréquences. On peut aussi procéder dans un ordre différent.

classe	A	B	C	D	E	Total
effectif	36	(54)	33	(66)	51	240
fréquence (%)	(15)	22,5	(13,75)	(27,5)	(21,25)	100

III moyenne de X: $\frac{4\times50+6\times30+5\times20+4\times10+1\times0}{20} = 26$. Un calcul similaire donne pour Y une moyenne de 26 aussi. On ne peut donc pas départager les 2 concurrents sur ces moyennes. On va donc chercher lequel est le plus régulier.

score	50	30	20	10	0
$(score - moyenne)^2$	576	16	36	256	676

La moyenne des valeurs de la 2^e ligne pour X donne la variance de X : $V_X = \frac{4\times576+6\times16+5\times36+4\times256+1\times676}{20} = 214$

Un calcul similaire pour Y donne $V_Y = 314$. Les écarts types de X et de Y sont $\sigma_X = \sqrt{V_X} \simeq 14,6$ et $\sigma_Y = \sqrt{V_Y} = 18$. C'est donc X le plus régulier.

IV L'erreur consiste à penser que 20% de réduction sur un article à 120F ferait pile un billet de 100F. Mais en fait $120 - \frac{80}{100} \times 120 = 96F$. Avec le billet de 100F il nous restera donc encore 4F si l'article faisait au départ 120F.

Et si on voulais tomber pile sur 100F après la remise, combien l'article valait il au départ ? (c'est sûrement l'idée qu'avait en tête l'auteur de la pub...)

DS 02 du 18/10/1999

Pensez à toujours justifier vos réponses de façon claire. La notation en tiendra compte.
Barême provisoire : (I sur 4,5 ; II sur 7,5 ; III sur 6; IV sur 2).

I Simplifier le plus possible les fractions suivantes en utilisant des décompositions en facteurs premiers
(par exemple $75 = 5^2 \times 3$).
Vous écrirez vos résultats en ne faisant apparaître que des exposants positifs

- $\dfrac{(10^2 \times 5^7)^{-2}}{280}$
- $\dfrac{(2^{46} \times 10^{24})^{-2}}{(40)^{-27}}$
- $\dfrac{1+\dfrac{2}{3}}{5-\dfrac{1}{2}} \times \dfrac{3^5}{2^3}$

II
(a) Simplifier les expressions $\dfrac{a^3b^{-2}}{b^{-3}a^4}$ et $a^2b^3a^{-2}b^{-4}$ (écrivez vos résultats en ne faisant apparaître que des exposants positifs).
(b) Développer $E_1 = (a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)$
(c) Développer $E_2 = (a \times c + b \times d)^2$
(d) Développer $E_3 = (a \times d - b \times c)^2$
(e) comparer le résultat de E_1 obtenu au (b) avec la somme $E_2 + E_3$ des résultats du (c) et du (d).

III Factoriser les expressions suivantes :
(a) $F_1 = (2x)^2 - 4x + 1$
(b) $F_2 = 21x^2 + 7x^5$
(c) $F_3 = (x+3)(x-3) + 9 + 2x$
(d) $F_4 = 4x^2 - 9$

IV Le prix d'un article augmente de 25% chaque début d'année. Cela signifie que le prix de l'année précédente a été multiplié par un nombre A. On rappelle en guise d'exemple qu'une augmentation de 100% correspond à une multiplication par 2 du prix précédent.

(a) Ce nombre A vaut il quatre cinquièmes de trois demis, cinq sixièmes de trois demis ou vingt et un quatorzièmes ? (justifiez votre réponse).
(b) Après N années, par combien le prix de l'article a t'il été multiplié? (on exprimera ce nombre en fonction de N)

DS 02 (correction)

I

- $\dfrac{(10^2 \times 5^7)^{-2}}{280} = \dfrac{1}{280 \times (10^2 \times 5^7)^2} = \dfrac{1}{10 \times 4 \times 7 \times 10^{2\times 2} \times 5^{7\times 2}} = \dfrac{1}{4 \times 7 \times 10^5 \times 5^{14}} = \dfrac{1}{2^2 \times 7 \times (2\times 5)^5 \times 5^{14}} \boxed{= \dfrac{1}{2^7 \times 5^{19} \times 7}}$
- $\dfrac{(2^{46} \times 10^{24})^{-2}}{(40)^{-27}} = \dfrac{40^{27}}{(2^{46} \times 10^{24})^2} = \dfrac{40^{27}}{2^{92} \times 10^{48}} = \dfrac{(2^3 \times 5)^{27}}{2^{92} \times (2\times 5)^{48}} = \dfrac{2^{3\times 27} \times 5^{27}}{2^{92} \times 2^{48} \times 5^{48}} = \dfrac{1}{2^{92+48-81} \times 5^{48-27}}$ $\boxed{= \dfrac{1}{2^{59} \times 5^{21}}}$
- $\dfrac{1+\dfrac{2}{3}}{5-\dfrac{1}{2}} \times \dfrac{3^5}{2^3} = \dfrac{\dfrac{5}{3}}{\dfrac{9}{2}} \dfrac{3^5}{2^3} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3^5}{2^3} \boxed{= \dfrac{5 \times 3^2}{2^2}}$

II
(a) $\dfrac{a^3b^{-2}}{b^{-3}a^4} = \frac{a^3b^3}{b^2a^4} = \frac{b}{a}$
$a^2b^3a^{-2}b^{-4} = \frac{a^2b^3}{a^2b^4} = \frac{1}{b}$
(b) $E_1 = (a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$
(c) $E_2 = (a \times c + b \times d)^2 = a^2c^2 + 2 \times a \times c \times b \times d + b^2d^2$
(d) $E_3 = (a \times d - b \times c)^2 = a^2d^2 - 2 \times a \times d \times b \times c + b^2c^2$
(e) $E_2 + E_3 =$
$a^2c^2 + 2 \times a \times c \times b \times d + b^2d^2 + a^2d^2 - 2 \times a \times d \times b \times c + b^2c^2$
$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = E_1$

III
(a) $F_1 = (2x)^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$
(b) $F_2 = 21x^2 + 7x^5 = 7x^2(3 + x^3)$
(c) $F_3 = (x+3)(x-3) + 9 + 2x = x^2 - 9 + 9 + 2x = x^2 + 2x = x(x+2)$
(d) $F_4 = 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$

IV (a) Apres 25% d'augmentation le nouveau prix est de $A + A \times \frac{25}{100} = 1,25 \times A$. A vaut donc 1,25 ce qui s'écrit encore cinq sixièmes de trois demis $= \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$

(b) Le prix entre la première année et la deuxième est multiplié par 1,25. La 3^e année, le prix sera 1,25 fois le prix de la 2^e année, qui est lui même 1,25 fois le prix de la première année. Donc le prix de la 3^e année vaut $1,25 \times 1,25$ fois le prix de la première année, c'est à dire quand il s'est écoulé 2 ans. Au bout de N années le prix sera donc $(1,25)^N$ fois le prix de la première année.

DM 02 pour le 25/10/1999

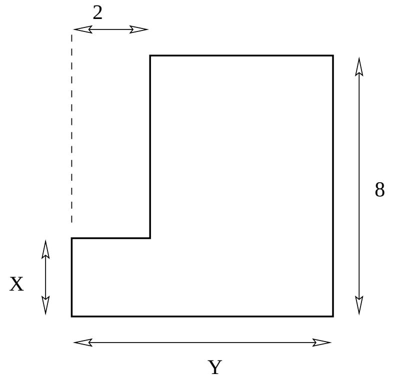
I Simplifier le plus possible les fractions suivantes et préciser pour quelles valeurs de x ces fractions ne peuvent être calculées :

- $\dfrac{x-2}{x^2-4}$
- $\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$

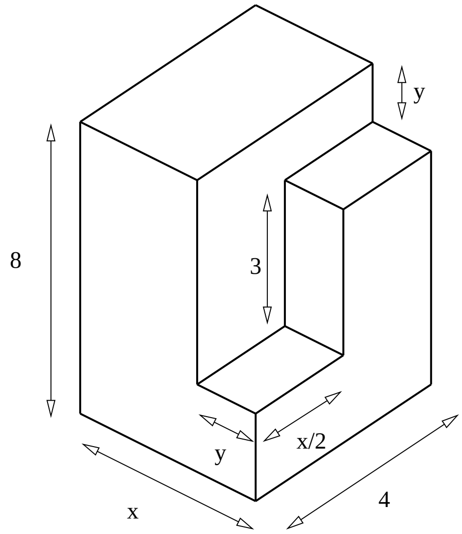
II Développer et simplifier :
(a) $(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)$
(b) $(a-b)\times(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

III Factoriser les expressions suivantes :
(a) $F_1 = 2(x^2+1)+(x-1)(x+2)-2x^2$
(b) $F_2 = x^4-16$

IV
(a) Calculer l'aire de la figure suivante :



(b) Calculer le volume de la figure suivante :



DM 02 (correction)

I

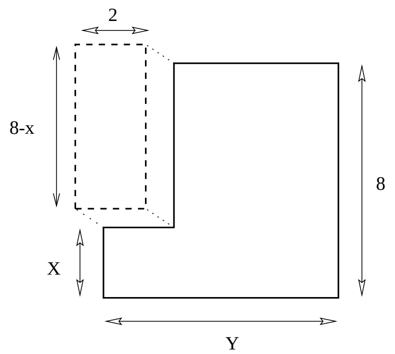
- $\dfrac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$ à condition que x soit différent de 2 et de -2, car alors le dénominateur de l'expression de départ est nul et diviser par 0 n'a pas de sens.
- $\dfrac{x^2+4x+4}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)} = x+2$ à condition que x soit différent de -2 pour la même raison qu'à la question précédente.

II (a) $(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1) = x^4+1$
(b) $(a-b)\times(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4-b^4$

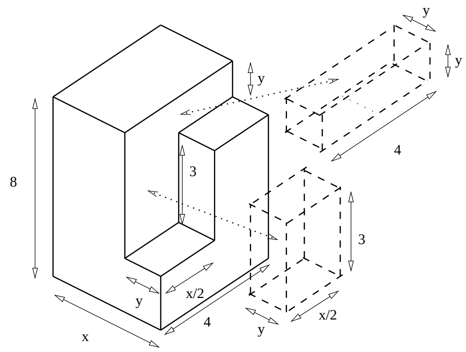
III $F_1 = 2(x^2+1)+(x-1)(x+2)-2x^2$
$= 2x^2+2+x^2-x+2x-2-2x^2$
$= x^2+x = x(x+1)$

$F_2 = x^4-16 = (x^2)^2-4^2$
$= (x^2-4)(x^2+4) = (x^2-2^2)(x^2+4)$
$= (x-2)(x+2)(x^2+4)$
Remarque : le terme x^2+4 ne peut pas se factoriser, contrairement à x^2-4 pour lequel on a une formule $a^2-b^2=...$

IV
(a) $aire = 8y - 2\times(8-x) = 8y+2x-16$



(b) $Volume = 8\times4\times x - y\times y\times4 - 3\times y\times\frac{x}{2} = 32x - 4y^2 - \frac{3}{2}xy$



DS 03 du 22/11/1999

Pensez à toujours justifier vos réponses de façon claire. La notation en tiendra compte.
Barême provisoire : (I sur 10; II sur 2; III sur 5; IV sur 3).

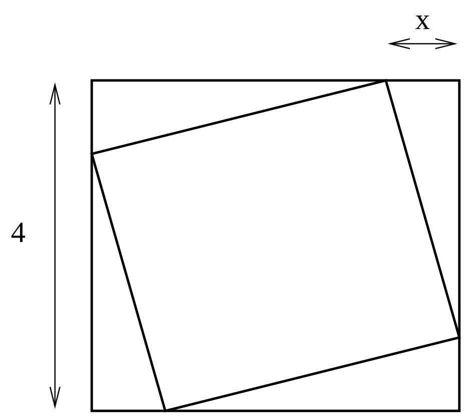
I Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{2x-1} &= 0 \\
\frac{x^2-3x+7}{-5x+6} &= 1 \\
(3x+1)(2x-1) &= (3x+5)(2x+1) \\
(3x+1)(x-2)-2x(x-2) &= 0 \\
\left((x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2 &= 3x^2+\frac{2}{9} \\
\frac{9x^2+2x-5}{2x-1} &= 1
\end{aligned}$$

II
Démontrer par l'absurde que 2 n'est pas une solution de l'équation

$$\frac{x^2-x-2}{x^3+4x^2-3x-18}=0$$

III Voici un carré qui ferait 4 cm de côté à l'échelle 1, qui contient un carré plus petit touchant les 4 cotés du grand.



(a) Montrer que l'aire du petit carré qui est à l'intérieur du grand vaut $A=x^2+(4-x)^2$
(b) Développer $2(x-1)(x-3)$
(c) Utiliser ce qui précède pour trouver à quelle(s) condition(s) l'aire du petit carré vaut 10 cm^2.

IV Le prix d'un objet augmente chaque année de x pourcents.
(a) Montrer qu'au bout de 4 ans son prix est multiplié par $\left(1+\frac{x}{100}\right)^4$.
(b) Quel est ce pourcentage x sachant qu'en quatre ans, le prix de l'objet a doublé?

DS 03 (correction)

Barême effectif : (I sur 12; II sur 2; III sur 4; IV sur 2).

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{2x-1} &= 0 \Leftrightarrow 3x+2=0 \;\; et \;\; 2x-1\neq 0 \\
\Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3} \;\; et 2\times\left(-\frac{2}{3}\right)-1 \;\; S=\left\{-\frac{2}{3}\right\} \\
\frac{x^2-3x+7}{-5x+6} &= 1 \\
\Leftrightarrow x^2-3x+7 &= -5x+6 \;\; et \;\; -5x+6\neq 0 \\
\Leftrightarrow x^2+2x+1 &= 0 \;\; et \;\; -5x+6\neq 0 \\
\Leftrightarrow (x+1)^2 &= 0 \;\; et \;\; -5x+6\neq 0 \\
\Leftrightarrow (x+1) &= 0 \;\; et \;\; -5x+6\neq 0 \\
\Leftrightarrow x &= -1 \;\; et \;\; -5\times(-1)+6=11 \\
donc \;\; S &= \{-1\} \\
(3x+1)(2x-1) &= (3x+5)(2x+1) \\
\Leftrightarrow 6x^2-x-1 &= 6x^2+13x+5 \\
\Leftrightarrow -6 &= 14x \Leftrightarrow x=-\frac{6}{14}=-\frac{3}{7} \;\; S=\left\{-\frac{3}{7}\right\} \\
0 &= (3x+1)(x-2)-2x(x-2) \\
\Leftrightarrow 0 &= (x-2)\left[(3x+1)-2x\right] \\
\Leftrightarrow 0 &= (x-2)(x+1) \\
\Leftrightarrow x-2=0 \;\; &ou \;\; x+1=0 \;\; S=\{2;-1\} \\
3x^2+\frac{2}{9} &= \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 3x^2+\frac{2}{9} &= x^2-\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}+4x^2+\frac{4x}{3}+\frac{1}{9} \\
\Leftrightarrow 2x^2+\frac{2x}{3} &= 0 \Leftrightarrow 2x\left(x+\frac{1}{3}\right)=0 \\
\Leftrightarrow 2x &= 0 \;\; ou \;\; \left(x+\frac{1}{3}\right)=0 \;\; S=\left\{0;-\frac{1}{3}\right\} \\
\frac{9x^2+2x-5}{2x-1} &= 1 \\
\Leftrightarrow 9x^2+2x-5 &= 2x-1 \;\; et \;\; 2x-1\neq 0 \\
\Leftrightarrow 9x^2-4 &= 0 \;\; et \;\; 2x-1\neq 0 \\
\Leftrightarrow (3x-2)(3x+2) &= 0 \;\; et \;\; 2x-1\neq 0 \;\; S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}
\end{aligned}$$

II Supposons que 2 soit solution de

$$\frac{x^2-x-2}{x^3+4x^2-3x-18}=0$$

Alors le dénominateur ne doit pas être nul mais $2^3+4\times 2^2-3\times 2-18=0$. On a donc une contradiction et 2 n'est donc pas solution de l'équation.

III (a) Le côté du petit carré est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés ont pour longueur x et $4-x$. L'hypothénuse a donc pour longueur $l=\sqrt{x^2+(4-x)^2}$ (Pythagore). L'aire du petit carré est donc le carré de cette longueur c'est à dire $x^2+(4-x)^2$.
(b) $2(x-1)(x-3)=2x^2-8x+6$
(c) $Aire=10=x^2+(4-x)^2$ donc $10=x^2+16-8x+x^2 \Leftrightarrow 0=2x^2-8x+6$ et en utilisant (b) on déduit que $x=1$ ou $x=3$.

IV (a) Appelons P_{1999} le prix de l'objet en 1999. En 2000 il vaut $P_{2000}=P_{1999}+\frac{x}{100}\times P_{1999}=P_{1999}\left(1+\frac{x}{100}\right)$. Le prix en 2001 est donc $P_{2001}=P_{2000}\left(1+\frac{x}{100}\right)=P_{1999}\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ et ainsi de suite, donc $P_{2003}=P_{1999}\left(1+\frac{x}{100}\right)^4$.
(b) $P_{2003}=2\times P_{1999}\Leftrightarrow\left(1+\frac{x}{100}\right)^4=2$ donc $1+\frac{x}{100}=\sqrt{\sqrt{2}}$ et donc $x=100\times(\sqrt{\sqrt{2}}-1)\simeq 18,9\%$.

DM 03 pour le 15/11/1999

I J'ai 11 objets à ranger dans 5 boites.
(a) Démontrer qu'une des boites contiendra au moins 3 objets.
(b) Vous direz ensuite si votre raisonnement est un raisonnement "par l'absurde" et **vous justifierez pourquoi**.
(c) Si votre démonstration du (a) est faite par l'absurde, proposez au moins une méthode pour démontrer ce résultat sans faire un raisonnement par l'absurde (on demande juste de résumer succintement comment on pourrait procéder). Dans le cas contraire, proposez une démonstration par l'absurde.

II Des maîtres nageurs veulent installer une zone de baignade surveillée sur les bords d'un lac. Ils ont pour cela une corde avec des bouées faisant 100 mètres de long, qu'ils disposent dans l'eau en formant presque un rectangle (presque puisque la corde n'a pas besoin d'être posée sur la plage, mais doit être uniquement dans l'eau, ce qui fait juste un U).
La largeur du rectangle est notée x.

(a) Montrer que l'aire du rectangle formé (aire disponible pour les baigneurs) vaut $A = x(100 - 2x)$.
(b) Montrer que $2 \times (25 - x)^2 = 1250 - A$ (indication : développer **séparément** le membre de gauche et le membre de droite et constatez ensuite s'ils sont égaux où non).
(c) Déduire du (b) que l'aire du rectangle est inférieure à $1250\ m^2$.
(d) L'aire du rectangle ne doit pas dépasser $1050\ m^2$ à cause d'une réglementation. Quelles sont alors les valeurs possibles de la largeur x pour obtenir cette aire.

III Montrer que l'équation :

$$\frac{5}{x+2} = \frac{8}{2x+3} + \frac{1}{x-1}$$

est équivalente à l'équation :

$$\frac{2x+1}{(x+2)(2x+3)(x-1)} = 0$$

Résoudre ensuite cette équation.

IV Encadrements

On veut construire une canalisation entre deux murs. La mesure de la distance L entre ces murs n'est pas précise et on sait qu'elle est comprise entre 100m et 101m. Pour la canalisation, on utilise des tuyaux d'environ 1m mais leur fabrication n'est pas régulière. La longueur de deux de ces tuyaux n'est pas forcément identique mais le constructeur garanti que leur longueur D est comprise entre $0,995m$ et $1,005m$.

Combien faut il acheter de tuyaux au minimum pour être sûr et certain que les tuyaux mis bout à bout joindront les deux murs?
La canalisation démarre au ras du premier mur. Sur un axe horizontal, on place ce premier mur à gauche à la coordonnée $x = 0$. **Représenter** sur cet axe l'intervalle dans lequel se situe le deuxième mur, et l'intervalle dans lequel se situe l'extémité de la canalisation. Donner **l'intersection** de ces deux intervalles.
La canalisation dépasse donc le deuxième mur, d'une longueur que l'on note d. En vous aidant du graphique précédent, **calculer** dans quel intervalle de longueur varie la longueur d entre le deuxième mur et l'extrémité de la canalisation.

DM 03 (correction)

Barême effectif : (I sur 3; II sur 8; III sur 5; IV sur 4).

I (a) Par l'absurde : si aucune des boites contient au moins 3 objets c'est qu'il y en a au maximum 2 par boite (Remarque : les boites ne contiennent pas forcément toutes le même nombre d'objets, et ca n'a d'ailleurs pas d'importance). Comme il y a 5 boites, au total on aurrait au maximum 5×2 objets, c'est à dire 10. Comme on en a 11, l'hypothèse de départ est fausse et il a donc forcément une (ou plusieurs) boites qui contient au moins 3 objets.

(b) Au (a), on a donc commencé par supposer le contraire de ce que l'on voulais démontrer, c'est à dire qu'il y a au maximum 2 objets par boites. Si on compte le nombre total d'objet qu'on a rangé on en trouve au maximum 10, ce qui n'est pas compatible avec l'énoncé (11 objets) et on obtient ainsi une contradiction. Ce qu'on voulais démontrer est donc vrai.

(c) Pour ne pas faire de démonstration par l'absurde, on pourrait faire une liste complète de toutes les combinaisons possibles d'objets dans les boites (cette liste est très longue...). On constaterait que dans chaque combinaison, une des boite renferme au moins 3 objets. Dans cet exercice, la démonstration par l'absurde est vraiment la plus simple.

II Des maîtres nageurs veulent installer une zone de baignade surveillée sur les bords d'un lac. Ils ont pour cela une corde avec des bouées faisant 100 mètres de long, qu'ils disposent dans l'eau en formant presque un rectangle (presque puisque la corde n'a pas besoin d'être posée sur la plage, mais doit être uniquement dans l'eau, ce qui fait juste un U).
La largeur du rectangle est notée x.

(a) La largeur du rectangle vaut x. La longueur totale de corde vaut 100m, soit 2 fois la largeur x plus la longueur du rectangle. Cette longueur vaut donc $100 - 2x$ et l'aire A vaut donc $x(100 - 2x)$.

(b) $2\times(25-x)^2 = 2\times(25^2-2\times25\times x+x^2) = 1250-100x+2x^2$
$1250 - A = 1250 - x(100 - 2x) = 1250 - 100x + 2x^2$
On constate que les deux expressions sont identiques et on en déduit que $2 \times (25 - x)^2 = 1250 - A$

(c) Le (b) donne $A = 1250 - 2 \times (25 - x)^2$. Un carré est toujours positif donc $1250 - 2 \times (25 - x)^2$ c'est 1250 moins un nombre positif, donc c'est bien plus petit que 1250.

(d) Pour que l'aire vaille 1050, on doit avoir donc $A = 1050$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
1250 - 2 \times (25 - x)^2 &= 1050 \\
\Leftrightarrow\ 2 \times (25 - x)^2 &= 200 \\
\Leftrightarrow\ (25 - x)^2 &= 100 \\
\Leftrightarrow\ 25 - x &= 10 \quad ou \quad 25 - x = 10 \\
\Leftrightarrow\ x &= 15 \quad ou \quad x = 30
\end{aligned}$$

$S = \{15; 30\}$

III On a $\frac{8}{2x+3} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{x+2} \Leftrightarrow \frac{8}{2x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x+2} = 0$ ce qui donne :

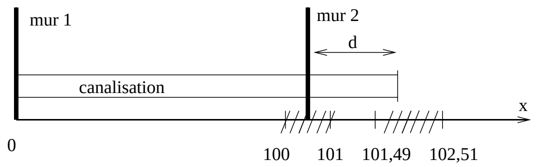
$$\begin{aligned}
\frac{8(x+2)(x-1) + (x+2)(2x+3) - 5(2x+3)(x-1)}{(x+2)(2x+3)(x-1)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{10x+5}{(x+2)(2x+3)(x-1)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{5(2x+1)}{(x+2)(2x+3)(x-1)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x+2)(2x+3)(x-1)} &= \frac{0}{5} = 0
\end{aligned}$$

Les solutions sont obtenues par $2x + 1 = 0$, c'est à dire $x = -\frac{1}{2}$ et on vérifie que le dénominateur n'est pas nul quand

$x = -\frac{1}{2}$. Donc $S = \{-\frac{1}{2}\}$

IV Encadrements

Pour être sûr de joindre les deux murs avec la canalisation, il faut se placer dans la pire des situations et faire en sorte que ca marche dans ce cas. On a dans le pire des cas les murs qui sont le plus éloignés possibles (101m) et les tuyaux les plus petits possibles (0,995m). Si on divise, on obtient $L/D = 101/0,995 \simeq 101,5$ et comme il faut un nombre entier de tuyaux il en faudra donc 102. On vérifie qu'avec 102 tubes, on parcours une distance d'au moins $102 \times 0,995 = 101,49m$ qui est plus grand que la distance maximale entre ces murs. Si les tubes ont tous la taille maximale, la longueur de la canalisation vaut $102 \times 1,005 = 102,51m$

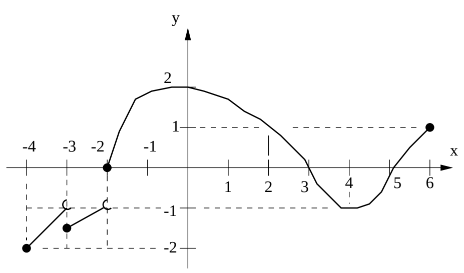


L'intersection des deux intervalles est l'ensemble vide, ils ne se chevauchent pas : $[100\ ;\ 101] \cap [101,49\ ;\ 102,51] = \emptyset$
La longueur minimale entre le 2^e mur et l'extrémité de la canalisation vaut $d_{mini} = 101,49 - 101 = 0,49m$ et la longueur maximale vaut $d_{maxi} = 102,51 - 100 = 2,51m$.
la distance d varie donc dans l'intervalle $[0,49\ ;\ 2,51]$

DS 04 du 13/12/1999

Barême provisoire : (I sur 10; II sur 5; III sur 5).

I Une fonction f est représentée par la courbe suivante :



(1) Répondre par vrai ou faux (pas de justification exigée) :

(a) f est croissante sur $[-3; -1]$? (b) $f(2) = 1$?
(c) Le maximum de f vaut 2? (d) l'image de 0 vaut 3?
(e) f est croissante sur $[4; 6]$? (f) Le minimum de f est 4?
(g) 0 a un seul antécédent?
(h) 1 est un antécédent de 2 par f?
(i) Le minimum de f vaut f(4)?
(j) 1 possède trois antécédents ?
(k) f est croissante sur $[-4; -2[$? (l) $f(0) = 2$?
(m) $f(0) > f(2)$? (n) f est décroissante sur $[0; 5]$?

(2) Faire le tableau de variations de f.

II Impots sur le revenu Quand on a gagné x francs en un an, alors on paie $I(x)$ francs d'impots. La fonction $I(x)$ est défini par :
Si $x \leq 34043$ alors $I(x) = 0$ (1^e tranche)
Si $34043 < x \leq 66965$
alors $I(x) = 0,0805x - 2740,5$ (2^e tranche)
Si $66965 < x \leq 117874$
alors $I(x) = 0,184x - 9671,4$ (3^e tranche)
Etc ....

(1) Tracer la courbe représentant $I(x)$ sur les 3 premières tranches d'impots.
(2) Faire le tableau de variations de $I(x)$.
(3) Combien gagne quelqu'un qui paie $6888,6\,F$ d'impots?

III $A(x)$ est la fonction qui pour x donné entre 0 et 8 donne l'aire hachurée ci-dessous :

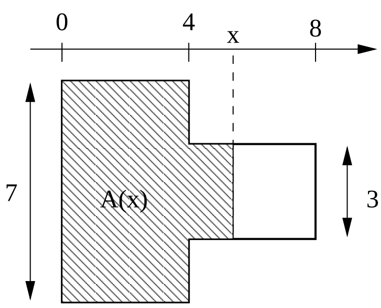
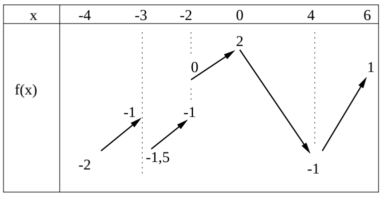


fig2

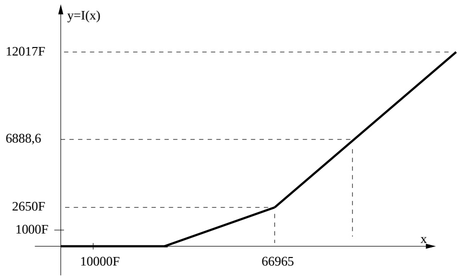
(a) Donner le plus précisément possible la définition de $A(x)$ (soit par des phrases, soit avec des symboles mathématiques, pourvu que ce soit clair et précis)
(b) Tracer la courbe représentant $A(x)$.
(c) Donner le tableau de variations de $A(x)$.

DS 04 (correction)

I (a) Vrai (b) Vrai (c) Vrai (d) Faux
(e) Vrai (f) Faux (minimum **en x = 4**)
(g) Faux (3 antécédents) (h) Faux
(i) Vrai ($f(4) = -1$ qui est le minimum de f)
(j) Vrai (k) Faux (chute brutale en $x = -3$) (l) Vrai
(m) Vrai $f(0) = 2$ et $f(2) = 1$ donc $f(0) > f(2)$
(n) Faux (elle remonte à partir de $x = 4$)



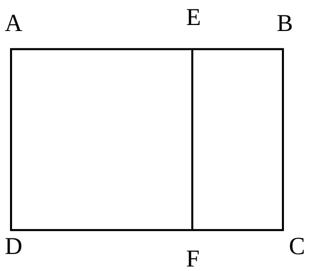
II



x	0	34043	117874
f(x)	0 →	0 ↗	12017

DM 04 pour le 06/12/1999

I Mise en Equations

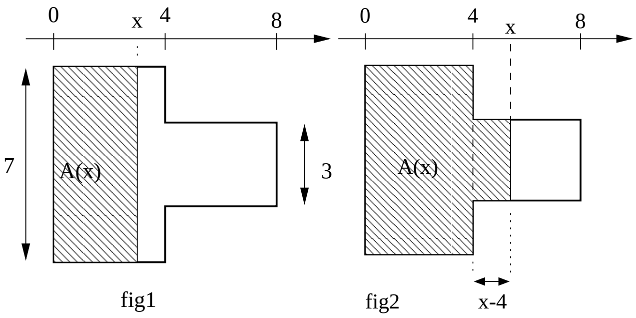


(a) (AEFD) est un carré dont le côté est la largeur du rectangle (ABCD). On appelle format d'un rectangle le rapport $longueur/largeur$ (par exemple vous pourrez vérifier que le format d'une feuille A4 vaut $\sqrt{2}$). On veut que le format de (ABCD) soit le même que le format du rectangle (EBCF), quelle équation peut on poser pour résoudre ce problème? (comme inconnue on pourra par exemple prendre le format d'un des rectangles)
(b) Si votre équation contient des fractions, mettez tout au même dénominateur et ramenez vous à une équation de la forme .... = 0.
(c) Vérifier que le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution du problème (ce nombre, appelé "nombre d'or" était déjà utilisé dans l'antiquité en architecture : proportion des colonnes de temples grecs, pyramides...)

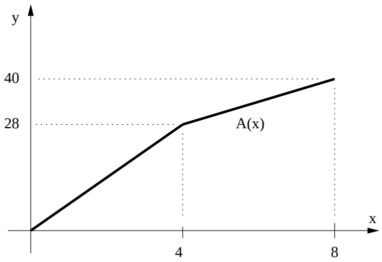
II Fonctions : dans une feuille de papier de dimensions L et l **qui sont fixées** on découpe le patron d'un parallélépipède rectangle (on retire les rectangles appelés "chute" indiqués sur la figure). Connaissant la longueur marquée "x" sur le papier, on peut connaître toutes les dimensions du solide et donc son volume V(x).

On constate sur le graphique que $6888,6\,F$ d'impots correspond à la 3^e tranche. On doit donc résoudre $6888,6 = 0,184x - 9671,4$ et on trouve $x = (6888,6 + 9671,4)/0,184 = 90000F$

III

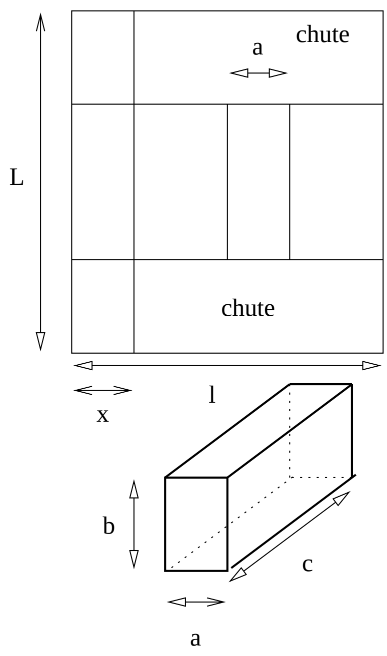


(a) Si $x \leq 4$ (figure 1) alors $A(x) = 7 \times x$.
Si $x \geq 4$ (figure 2) alors $A(x)$ est égal à l'aire du grand rectangle 7×4 plus l'aire du petit rectangle hachuré $3 \times (x - 4)$, ce qui fait $A(x) = 28 + 3(x - 4) = 3x + 16$



x	0	8
f(x)	0 ↗	40

(a) Expliquer grace au patron pourquoi $a = x$.
(b) Montrer que le volume V(x) est égal à $x\left(\frac{l}{2} - x\right)(L - l + 2x)$
(c) La feuille de papier fait 10cm sur 10cm. Représenter sur un graphique la courbe représentant le volume V(x) en fonction de la longueur x. Pour cela on prendra les abscisses de 0 à 5, les ordonnées de 0 à 50, et pour tracer la courbe on calculera à la calculatrice les images de 0; 0,2 ; 0,4 .... de 0,2 en 0,2 jusqu'à x=5 (cela fait 26 valeurs à calculer).
(d) Donner approximativement les dimensions du solide qui a le volume le plus grand.

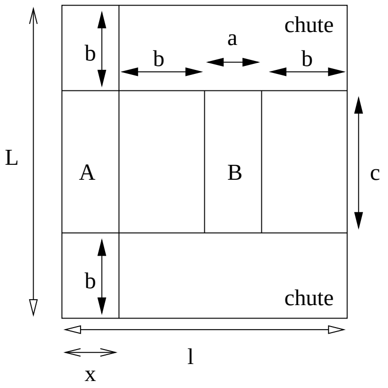


DM 04 (correction)

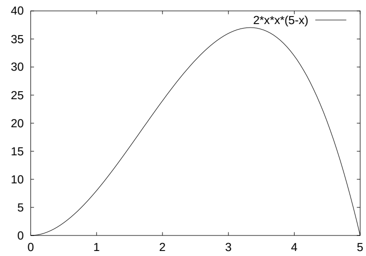
I Mise en Equations

(a) format de ABCD $= \frac{AB}{AD} = x$, format de FEBC $= \frac{EF}{EB}$
On a $EF = AD$ et $EB = AB - AE = AB - AD$ car AEFD est un carré (AE=AD). On a donc $\frac{EF}{EB} = \frac{AD}{AB-AD} = \frac{\frac{AD}{AD}}{\frac{AB-AD}{AD}} = \frac{1}{\frac{AB}{AD}-1} = \frac{1}{x-1}$
Les deux formats étant égaux on a $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EB}$ et donc $\boxed{x = \frac{1}{x-1}}$
(b) En transformant l'équation on obtient successivement $x - \frac{1}{x-1} = 0$ d'où $\frac{x(x-1)-1}{x-1} = 0$ d'où $\frac{x^2-x-1=0}{x-1} = 0$ et donc $x^2 - x - 1 = 0$
(c) Posons $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et calculons $x^2 - x - 1$.
$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} - \frac{4}{4}$
$= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} - \frac{4}{4}$
$= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{0}{4}\boxed{=0}$
Donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ est bien une solution du problème (on vérifie aussi que $x \neq 1$, donc le dénominateur $x-1$ n'est pas nul).

II Fonctions : (a) Si la face A est le fond du solide, la face B est alors le couvercle et ses dimensions sont identiques à celles de la face A. Donc $x = a$.
(b) Pour obtenir le volume il faut calculer les deux autres dimensions b et c du solide. Sur la largeur du patron on constate que $l = 2b + 2a = 2b + 2x$. Donc on en déduit que $2b = l - 2x$ et donc que $b = \frac{l}{2} - x$. Sur la longueur du patron on constate que $L = c + 2b$, donc $c = L - 2b = L - (l - 2x) = L - l + 2x$. Le volume vaut donc $a \times b \times c = x \times \left(\frac{l}{2} - x\right) \times (L - l + 2x)$



(c) Ici $L = l = 10$, donc $V(x) = x(5-x)(0+2x) = 2x^2(5-x)$



(d) Volume maxi $\simeq 37\ cm^3$ pour $x \simeq 3,35\ cm$ donc $a \simeq 3,35\ cm$, $b \simeq 1,65\ cm$ et $c = 6,7\ cm$.

DS 05 du 24/01/2000

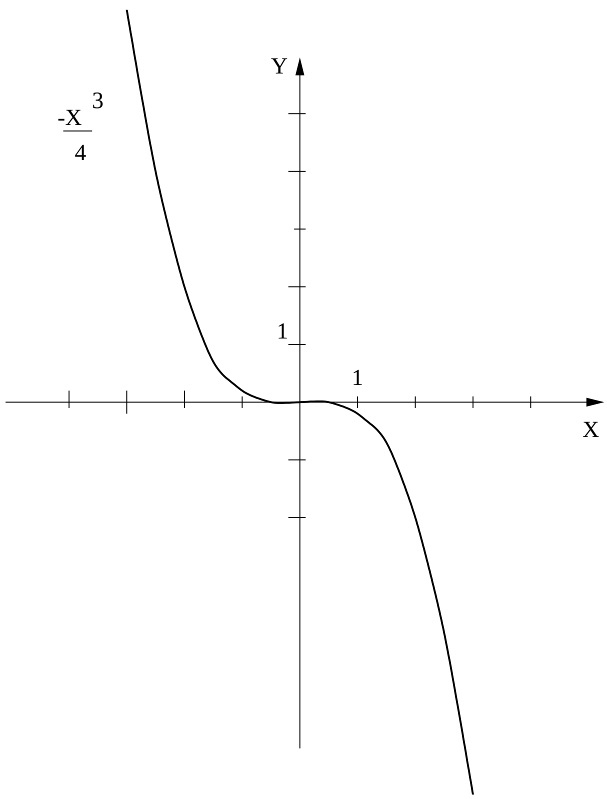
Les solutions graphiques seront données de façon approchée. Les courbes seront tracées à l'aide d'au moins 8 points (sauf les droites).
Barême provisoire : (I sur 6; II sur 6; III sur 3, IV sur 5).

I Les fonctions suivantes sont elles paires ou impaires ou ni l'un ni l'autre?
$f_1(x) = 2x - x^4$ $\quad f_2(x) = (1+x^2)^3$
$f_3(x) = (1-x)^4 \times (1+x)^4$ $\quad f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}$
$f_5(x) = x^2(x^3 + x^5)$ $\quad f_6(x) = x^3(1 + 2x + x^2)$

II Sur le graphique de droite on a représenté la courbe de la fonction $x \mapsto -\frac{x^3}{4}$ On pourra tracer les autres courbes de cet exercice sur ce même graphique (qu'il faudra alors rendre avec votre copie).
(1) Résoudre graphiquement $-\frac{x^3}{4} = 1 - 2x^2$ puis $-\frac{x^3}{4} < 1 - 2x^2$ (indiquer vos solutions sous forme d'intervalle).
(2) Soit $p(x)$ la fonction paire définie par $p(x) = 2 - x$ pour $x \geq 0$. Tracer la courbe de $p(x)$ sur le graphique et résoudre $-\frac{x^3}{4} = p(x)$ puis $-\frac{x^3}{4} \leq p(x)$
(3) Reproduire et compléter: "Soit $x < 0$, alors $-x > 0$, donc $p(-x) =$ ...., or on sait cette fonction est ...., donc $p(x) = ...p(...) = ...$" On a ainsi obtenu $p(x)$ pour $x < 0$.

III Tracer une fonction impaire $g(x)$ telle que $g(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$

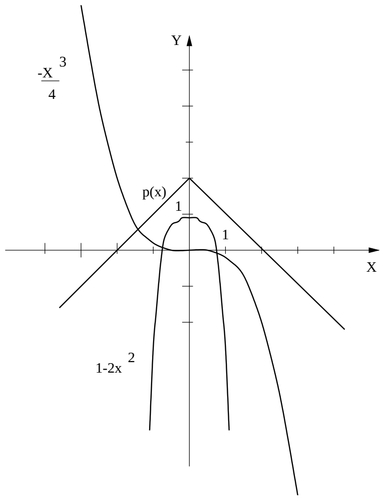
IV (1) Résoudre graphiquement $\frac{2}{x} \leq 3 - x$ (on pourra limiter le graphique à $x \in [-4; 4]$ et à $y \in [-4; 4]$)
(2) Sur le même graphique on tracera **sans chercher la précision** la courbe de $-3 + \frac{2}{x}$ entre $x = 0,5$ et $x = 4$ puis la courbe de $\frac{2}{x+4}$ entre $x = -3,5$ et $x = 0$
Vous expliquerez comment on obtient ces courbes à partir de la courbe de $\frac{2}{x}$



DS 05 (correction)

I Pour tout x, $f_1(-x) = -2x - x^4$ qui est différent de $f_1(x)$ et de $-f_1(x)$, donc f_1 est ni paire ni impaire.
$f_2(-x) = (1+(-x)^2)^3 = f_2(x)$ pour tout x, donc f_2 est paire
$f_3(-x) = (1-(-x))^4 \times (1+(-x))^4 = (1+x)^4 \times (1-x)^4 = f_3(x)$ donc f_3 est paire
$f_4(-x) = \frac{-x+1}{-x-1}$ (ni paire ni impaire)
$f_5(-x) = x^2(-x^3 - x^5) = -x^2(x^3 + x^5) = -f_5(x)$ (f_5 est impaire)
$f_6(-x) = -x^3(1 - 2x + x^2)$ (ni paire ni impaire)

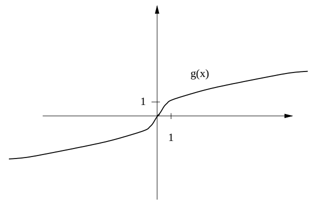
II



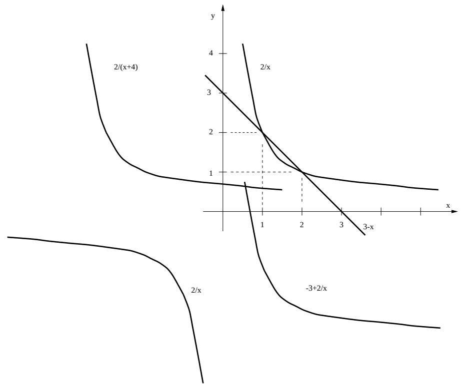
(1) $-\frac{x^3}{4} = 1 - 2x^2$ environ pour $x = \pm 0,7$ et $-\frac{x^3}{4} < 1 - 2x^2$ pour $x \in]-0,7; 07[$
(2) $-\frac{x^3}{4} = p(x)$ pour $x = -1,4$ environ et $-\frac{x^3}{4} \leq p(x)$ pour $x \in [-1,4; +\infty[$

(3) "Soit $x < 0$, alors $-x > 0$, donc $p(-x) = 2 - (-x)$, or on sait cette fonction est paire, donc $p(x) = +p(-x) = 2 + x$" On a ainsi obtenu $p(x)$ pour $x < 0$.

III Tracer une fonction impaire $g(x)$ telle que $g(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$

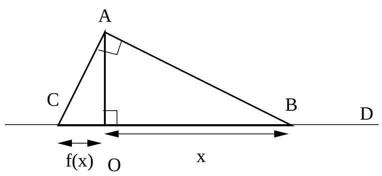


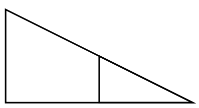
IV (1) $\frac{2}{x} \leq 3 - x$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup[1; 2]$ (2) $-3 + \frac{2}{x}$ a la même courbe que $\frac{2}{x}$ mais déplacée de 3 unités vers le bas. $\frac{2}{x+4}$ a la même courbe que $\frac{2}{x}$ mais déplacée de 4 unités vers la gauche.



DM 05 pour le 17/01/2000

I B est un point mobile sur la droite D. Le point A est fixe avec $OA = 2$ et C est tel que ABC est rectangle en A. La longueur OB est notée x et la longueur OC qui dépend de x est notée $f(x)$.



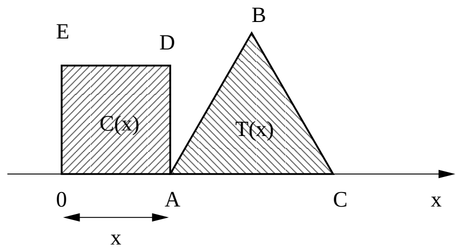


(1) Déterminer la fonction f. On pourra par exemple utiliser Thalès dans la figure du dessous, obtenue à partir de la figure du dessus en déplacant certains éléments.

(2) Résoudre graphiquement l'équation $\frac{f(x)}{2} = 3 - x$ et l'inéquation $\frac{f(x)}{2} > 3 - x$

(3) Résoudre approximativement $f(x) = x$ à l'aide de la figure de départ. Résoudre la même équation graphiquement en s'aidant du graphique du (2) et comparez vos deux résultats approchés.

II Le point A est un point mobile de l'axe horizontal compris entre l'origine O et le point fixe C tel que $OC = 2$. Pour un point A quelconque, on peut tracer un carré OADE et un triangle équilatéral ABC (voir figure). La longueur OA est noté x
L'aire du carré est une fonction de x notée $C(x)$. L'aire du triangle est de même notée $T(x)$.



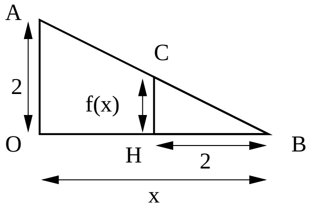
(1) Montrer que dans un triangle équilatéral, la longueur d'une hauteur vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois la longueur d'un côté (on utilisera pythagore dans un triangle rectangle faisant intervenir une hauteur).

(2) Explicitez les fonctions $C(x)$ et $T(x)$. Tracer leur courbe représentative dans un même repère et faire leur tableau de variations.

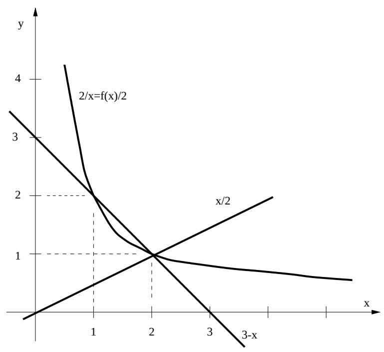
(3) Résoudre graphiquement $C(x) \geq T(x)$ (on donnera des valeurs approchées si besoin).

DM 05 (correction)

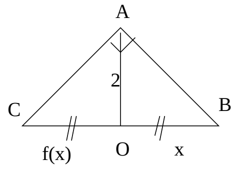
I On a ($\widehat{CAO} = 90 - \widehat{OAB}$) et ($\widehat{OAB} = 90 - \widehat{ABO}$) donc ($\widehat{CAO} = \widehat{ABO}$), ce qui fait qu'en déplacant le petit triangle ACO on peut l'inserer exactement dans l'angle en B du grand triangle. Thalès sur cette figure donne:



$2/x = f(x)/2$ et donc $f(x) = \frac{4}{x}$.

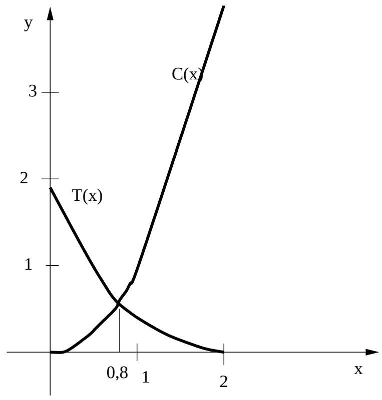


D'après la figure $\frac{f(x)}{2} = 3 - x$ pour $x = 1$ et $x = 2$. $\frac{f(x)}{2} > 3 - x$ pour $x \in \,]0; 1[\cup]2; +\infty[$.



Sur cette figure on voit que x vaut forcément 2. Par résolution graphique, comme on a tracé $f(x)/2$, on trace de plus $y = x/2$ qui permet de résoudre $f(x)/2 = x/2$, c'est à dire $f(x) = x$ et on retrouve encore $x = 2$.

II Dans un triangle équilatéral de côté c, une hauteur coupe le segment opposé en son milieu H et il apparait un triangle rectangle en H. Pythagore donne alors: $c^2 = hauteur^2 + (c/2)^2$, donc $hauteur^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}$, donc $hauteur = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'aire $C(x)$ vaut alors x^2 et $T(x) = base \times hauteur/2 = c \times c \times \frac{\sqrt{3}}{2}/2 = c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ et ici $c = 2 - x$ donc $T(x) = (2-x)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. $C(x) \geq T(x)$ pour $x \in [0,8\,; 2]$ (environ).



DS 06 du 11/02/2000

Toutes les règles de comparaison que vous utiliserez doivent apparaître clairement dans vos rédactions. N'utilisez que celles du cours.
Barême provisoire : (I sur 4; II sur 8; III sur 8).

I (1) Comparer $a = 1 - 2\sqrt{3}$ avec $b = 1 - 3\sqrt{2}$
(2) Déterminer le signe de a et de b.

II Encadrements

(1) Supposons que le nombre x vérifie $10^{-4} < x < 2$, donner un encadrement de $-x$, de $\frac{x}{10}$, de $\frac{1}{x}$, de $\sqrt{x}$ et de x^2
(2) Supposons que le nombre y vérifie $-5 < y < -2$, encadrer $y - 7$ puis y^2 et enfin $\frac{1}{y}$
(3) On prend dans cette question le x du (1) et le y du (2). Encadrer $x + y$; xy ; x/y et $x - y$

III Résoudre à l'aide d'un tableau de signes les inéquations suivantes (on donnera les solutions sous forme d'intervalles) :
(A) $(3 - x)(1 + 2x) \leq 0$
(B) $\frac{(3-x)(1+2x)}{x} \leq 0$
(C) $(x - 2)(x + 3) \geq (x - 2)(2x - 1)$ (Transformer d'abord l'inégalité puis factoriser)
(D) $x^3 \geq 4x$ (Transformer d'abord l'inégalité puis factoriser)

DS 06 du 11/02/2000

Toutes les règles de comparaison que vous utiliserez doivent apparaître clairement dans vos rédactions. N'utilisez que celles du cours.
Barême provisoire : (I sur 4; II sur 8; III sur 8).

I (1) Comparer $a = 1 - 2\sqrt{3}$ avec $b = 1 - 3\sqrt{2}$
(2) Déterminer le signe de a et de b.

II Encadrements

(1) Supposons que le nombre x vérifie $10^{-4} < x < 2$, donner un encadrement de $-x$, de $\frac{x}{10}$, de $\frac{1}{x}$, de $\sqrt{x}$ et de x^2
(2) Supposons que le nombre y vérifie $-5 < y < -2$, encadrer $y - 7$ puis y^2 et enfin $\frac{1}{y}$
(3) On prend dans cette question le x du (1) et le y du (2). Encadrer $x + y$; xy ; x/y et $x - y$

III Résoudre à l'aide d'un tableau de signes les inéquations suivantes (on donnera les solutions sous forme d'intervalles) :
(A) $(3 - x)(1 + 2x) \leq 0$
(B) $\frac{(3-x)(1+2x)}{x} \leq 0$
(C) $(x - 2)(x + 3) \geq (x - 2)(2x - 1)$ (Transformer d'abord l'inégalité puis factoriser)
(D) $x^3 \geq 4x$ (Transformer d'abord l'inégalité puis factoriser)

DS 06 (correction)

Barême effectif : (I sur 4; II sur 9; III sur 7).

I (1) $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$ donc $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ (ce sont des nombres positifs), donc $-3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}$ et donc $1 - 3\sqrt{2} < 1 - 2\sqrt{3}$
(2) Comme $(2\sqrt{3})^2 > 1^2$ on a $2\sqrt{3} > 1$ et donc $0 > 1 - 2\sqrt{3}$ et de même on montre aussi que $b < 0$

II Encadrements (1) $10^{-4} < x < 2$, donc $\boxed{-2 < -x < -10^{-4}}$ et $\boxed{10^{-5} < \frac{x}{10} < \frac{2}{10}}$, comme les 3 nombres de l'encadrement sont positifs on a $\boxed{\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 10^4}$ et $\boxed{10^{-2} < \sqrt{x} < \sqrt{2}}$ et enfin $\boxed{10^{-8} < x^2 < 4}$
(2) $-5 < y < -2$ donc $\boxed{-12 < y - 7 < -9}$, et comme $2 < -y < 5$ (nombres positifs) on a $4 < (-y)^2 < 25$ c'est à dire $\boxed{4 < y^2 < 25}$, de plus on a $\frac{1}{5} < \frac{1}{-y} < \frac{1}{2}$ donc $\boxed{-\frac{1}{2} < \frac{1}{y} < -\frac{1}{5}}$
(3) On a directement $-5 + 10^{-4} < x + y < 0$ puis pour xy on encadre d'abord $x \times (-y)$ ce qui donne $2 \times 10^{-4} < -xy < 5 \times 2$ et donc $\boxed{-10 < xy < -2 \times 10^{-4}}$ Pour x/y on encadre d'abord $\frac{x}{(-y)}$ (quotien de nombres positifs) et on a $\frac{10^{-4}}{5} < \frac{x}{-y} < \frac{2}{2}$ et donc $\boxed{-1 < \frac{x}{y} < -\frac{10^{-4}}{5}}$
Enfin $x - y = x + (-y)$ donc $\boxed{10^{-4} + 2 < x - y < 7}$

III (A) $(1 + 2x) > 0$ pour $x > -1/2$ et $3 - x > 0$ pour $x < 3$ ce qui donne le tableau de signes suivant :

x	- ∞		-1/2		3		∞
1+2x		-	0	+		+	
3-x		+		+	0	-	
(1+2x)(3-x)		-	0	+	0	-	

Donc les solutions de $(3 - x)(1 + 2x) \leq 0$ sont $x \in \,]-\infty; -1/2] \cup [3; +\infty[$
(B) Il faut rajouter x dans le tableau précédent ce qui donne :

x	- ∞		-1/2		0		3		∞
1+2x		-	0	+		+		+	
3-x		+		+		+	0	-	
x		-		-		+		+	
(1+2x)(3-x)/x		+		-		+		-	

et donc les solutions de $\frac{(3-x)(1+2x)}{x} \leq 0$ sont $x \in [-1/2; 0[\cup]3; +\infty[$
(C) $(x - 2)(x + 3) \geq (x - 2)(2x - 1)$ se transforme en $(x - 2)(x + 3) - (x - 2)(2x - 1) \geq 0$ ce qui donne $(x - 2)(-x + 4) \geq 0$ et le tableau est le suivant :

x	- ∞		2		4		∞
x-2		-	0	+		+	
4-x		+		+	0	-	
(x-2)(4-x)		-	0	+	0	-	

Donc $S = [2; 4]$
(D) $x^3 \geq 4x$ devient $x^3 - 4x \geq 0$ puis en factorisant x on a $x(x^2 - 4) \geq 0$ et enfin $x(x - 2)(x + 2) \geq 0$ qui a été résolue dans le module 19, et on a ici $S = [-2; 0] \cup [2; +\infty[$

DM 06 pour le 07/02/2000

I Tracer la fonction $x \mapsto |x|$ dans un repère (on se limitera à $x \in [-3; 3]$). Résoudre graphiquement $|x| < 1$

II (1) Dans un repère, tracer les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$. (on limitera le dessin à $x \in [-5; 5]$ et à $y \in [-5; 5]$)
(2) On considère un point M de coordonnées x_M et y_M tel que $2 \leq x_M \leq 4$. Où se situe ce point par rapport aux droites tracées précédemment? Hachurer toute la région du plan où on peut trouver un tel point M.
(3) Hachurer toute la région du plan où on peut trouver un point $N(x_N; y_N)$ tel que $-2 \leq y_N \leq 1$
(4) Hachurer toute la région du plan où on peut trouver un point $P(x_P; y_P)$ tel qu'on ait simultanément $-3 \leq x_P \leq -1$ et $1 \leq y_P \leq 2$
(5) Donner un encadrement de $x_P \times y_P$, de $x_P + y_P$, et de $x_P - y_P$

III (1) Dans un même repère, résoudre graphiquement $-1 + \frac{x}{2} \geq 0$ et $-2 - x \geq 0$ et hachurer sur l'axe des x les intervalles qui correspondent aux solutions de ces deux inéquations.
(2) On va dans cette question résoudre l'inéquation $\left(-1 + \frac{x}{2}\right)(-2 - x) \geq 0$
On sait que le produit des deux parenthèses précédentes est négatif si (et seulement si) les deux parenthèses sont de signes contraires. En utilisant cette propriété et le graphique fait au (1), donner les solutions de l'inéquation (sous forme d'intervalle(s))

DM 06 pour le 07/02/2000

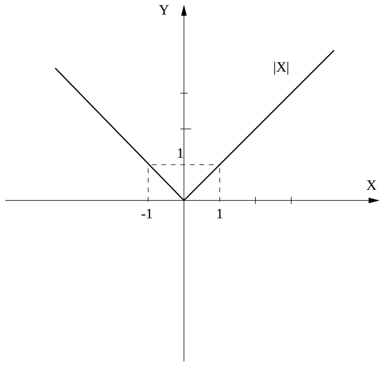
I Tracer la fonction $x \mapsto |x|$ dans un repère (on se limitera à $x \in [-3; 3]$). Résoudre graphiquement $|x| < 1$

II (1) Dans un repère, tracer les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$. (on limitera le dessin à $x \in [-5; 5]$ et à $y \in [-5; 5]$)
(2) On considère un point M de coordonnées x_M et y_M tel que $2 \leq x_M \leq 4$. Où se situe ce point par rapport aux droites tracées précédemment? Hachurer toute la région du plan où on peut trouver un tel point M.
(3) Hachurer toute la région du plan où on peut trouver un point $N(x_N; y_N)$ tel que $-2 \leq y_N \leq 1$
(4) Hachurer toute la région du plan où on peut trouver un point $P(x_P; y_P)$ tel qu'on ait simultanément $-3 \leq x_P \leq -1$ et $1 \leq y_P \leq 2$
(5) Donner un encadrement de $x_P \times y_P$, de $x_P + y_P$, et de $x_P - y_P$

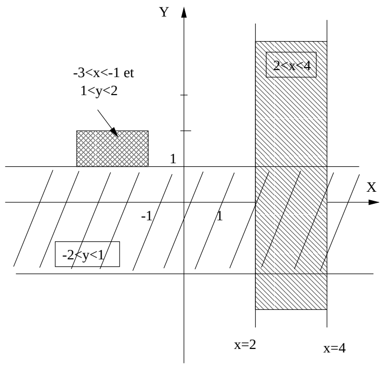
III (1) Dans un même repère, résoudre graphiquement $-1 + \frac{x}{2} \geq 0$ et $-2 - x \geq 0$ et hachurer sur l'axe des x les intervalles qui correspondent aux solutions de ces deux inéquations.
(2) On va dans cette question résoudre l'inéquation $\left(-1 + \frac{x}{2}\right)(-2 - x) \geq 0$
On sait que le produit des deux parenthèses précédentes est négatif si (et seulement si) les deux parenthèses sont de signes contraires. En utilisant cette propriété et le graphique fait au (1), donner les solutions de l'inéquation (sous forme d'intervalle(s))

DM 06 (correction)

I On a $|x| < 1$ pour $x \in]-1; 1[$



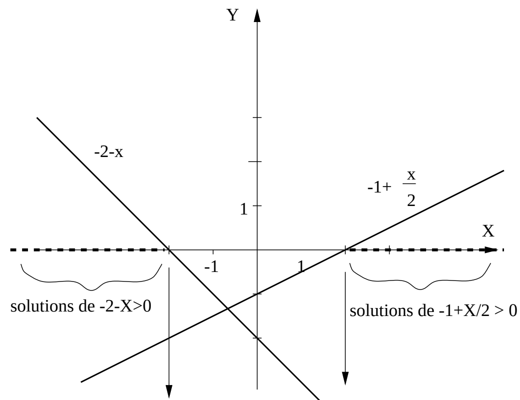
II



(5) $-3 \leq x_P \leq -1$ donc $1 \leq -x_P \leq 3$ et comme $1 \leq y_P \leq 2$ on peut multiplier membre à membre ces deux encadrements qui ne contiennent que des nombres positifs. On obtient $1 \leq -x_P \times y_P \leq 6$ ce qui donne enfin $-6 \leq x_P \times y_P \leq -1$

Pour la somme il suffit d'ajouter membres à membre $-3 \leq x_P \leq -1$ et $1 \leq y_P \leq 2$, on obtient alors $-2 \leq x_P + y_P \leq 1$
Enfin, comme $-2 \leq -y_P \leq -1$, on a $-5 \leq x_P - y_P \leq -2$

III (2) On a résumé dans le tableau sous la figure les signes de chaque parenthèse en fonction de x. On constate que ces deux parenthèses sont de signes contraires pour $x \geq 2$ ou pour $x \leq -2$. Par conséquent les solutions de $\left(-1 + \frac{x}{2}\right)(-2 - x) \leq 0$ sont $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$



-2-X	+	−	−
-1+X/2	−	−	+
Produit des deux	−	+	−

DM 07 pour le 20/03/2000

I Soit un triangle ABC

(1) Tracer les points B' et C' tels que $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

(2) Déduire des relations du (1) la propriété $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ en faisant des calculs sur les vecteurs (Indication : $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}$ d'après Chasles)

(3) La propriété du (2) peut s'obtenir aussi par un raisonnement géométrique utilisant un théorème vu en 3^e. Rédigez ce raisonnement.

(4) Tracer D et D' tels que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'D'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B'C'}$
Montrer que $\overrightarrow{AD'} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC})$ (Indication : on pourra pour commencer utiliser la relation $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'D'}$)

(5) En s'aidant de la relation démontrée au (4), exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD'}$ en fonction seulement du vecteur $\overrightarrow{AD}$
Que peut on alors dire des points A, D et D' ?

II Soient 4 points A,B,C et D vérifiant la relation: $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
Démontrer que B,C et D sont alignés (Indication: décomposer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles.)

III Tracer un parallèlogramme ABCD en placant le point A en bas à gauche de votre figure et le segment $[AB]$ horizontal. P désigne le centre du parallèlogramme.

(1) Tracer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et le point N tel que $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AC}$

(2) Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$

(3) En déduire les coordonnées de M et N dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$

DM 07 pour le 20/03/2000

I Soit un triangle ABC

(1) Tracer les points B' et C' tels que $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

(2) Déduire des relations du (1) la propriété $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ en faisant des calculs sur les vecteurs (Indication : $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}$ d'après Chasles)

(3) La propriété du (2) peut s'obtenir aussi par un raisonnement géométrique utilisant un théorème vu en 3^e. Rédigez ce raisonnement.

(4) Tracer D et D' tels que $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'D'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B'C'}$
Montrer que $\overrightarrow{AD'} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD})$ (Indication : on pourra pour commencer utiliser la relation $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'D'}$)

(5) En s'aidant de la relation démontrée au (4), exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD'}$ en fonction seulement du vecteur $\overrightarrow{AD}$
Que peut on alors dire des points A, D et D' ?

II Soient 4 points A,B,C et D vérifiant la relation: $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
Démontrer que B,C et D sont alignés (Indication: décomposer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles.)

III Tracer un parallèlogramme ABCD en placant le point A en bas à gauche de votre figure et le segment $[AB]$ horizontal. P désigne le centre du parallèlogramme.

(1) Tracer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et le point N tel que $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AC}$

(2) Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$

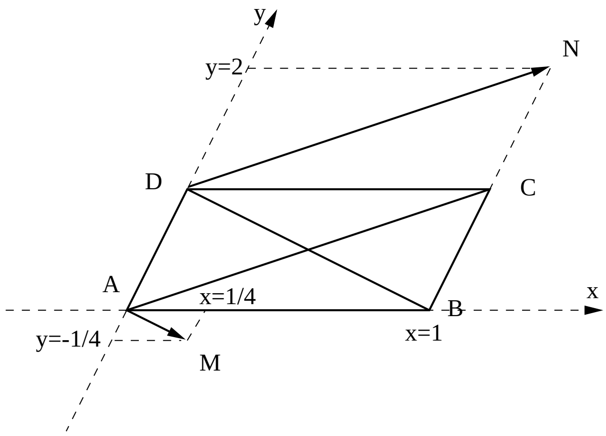
(3) En déduire les coordonnées de M et N dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$

DM 07 (correction)

I (2) $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$
(3) D'après l'énoncé on a A, B et B' alignés, A, C et C' alignés, et $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{2}{5}$
On peut alors appliquer la réciproque de Thalès qui dit alors que $(BC) \parallel (B'C')$ et que $\frac{BC'}{BC} = \frac{2}{5}$. De plus $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ ont le même sens. Ces trois choses permettent de conclure que $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$
(4) $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'D'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)$
(5) D'après l'énoncé on a $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, on remplace dans l'expression du (4) et on obtient $\overrightarrow{AD'} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc colinéaires et formés à partir de seulement 3 points A, D et D', ces 3 points sont donc alignés.

II D'après Chasles on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ qu'on remplace dans $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et on obtient $5\overrightarrow{AD} = 3(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = 5\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}$ qui se simplifie en $3\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$
Ces deux vecteurs formés à l'aide de 3 points étant colinéaires, les 3 points B, C et D sont alignés.

III (2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (car on est dans un parallèlogramme), $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ (en utilisant Chasles), $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$ et enfin $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$
(3) Les deux égalités précédentes signifient que $M(1/4; -1/4)$ et $N(1; 2)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$



DS 08 du 22/05/2000

Barême provisoire : (I sur 6; II sur 4; III sur 4; IV sur 6).

I Dans un repère orthonormé on considère les 4 points suivants $A(1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(5; 5)$ et $D(1; -1)$
(1) Démontrer que ABCD est un trapèze.
(2) Calculer l'équation de (AC) et l'équation de (BD) en faisant intervenir les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$
(3) Donner l'équation de la droite qui passe par le point $E(-3; 5)$ et qui est perpendiculaire à (AC)

II Résoudre les systèmes suivants:
(1) $\begin{cases} y + 3x + 1 = 0 \\ x + 5 - 2y = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 3x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$

III (1) Résoudre le système d'inéquations suivant :
$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ 2x + 3y - 6 < 0 \end{cases}$
(2) On rajoute au système précédent une inéquation supplémentaire $3y + 4x - 12 > 0$. Quelles sont les solutions de ce nouveau système (compléter votre figure puis justifier grace à cette figure).

IV On se place ici dans un repère orthonormé.
(1a) Trouver les valeurs de x telles que $\vec{U}(3\,;\,2)$ et $\vec{V}(-2x\,;\,2-x)$ soient orthogonaux.
(1b) Pour chaque solution trouvée au (1a), tracer les deux vecteurs dans une figure, puis faire une autre figure pour $x = 1$
(2) Même question qu'au (1a) avec $\vec{U}(\frac{1}{x+1}\,;\,\frac{3x+11}{x+2})$ et $\vec{V}(x+1\,;\,-\frac{1}{x+1})$

DS 08 du 22/05/2000

Barême provisoire : (I sur 6; II sur 4; III sur 4; IV sur 6).

I Dans un repère orthonormé on considère les 4 points suivants $A(1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(5; 5)$ et $D(1; -1)$
(1) Démontrer que ABCD est un trapèze.
(2) Calculer l'équation de (AC) et l'équation de (BD) en faisant intervenir les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$
(3) Donner l'équation de la droite qui passe par le point $E(-3; 5)$ et qui est perpendiculaire à (AC)

II Résoudre les systèmes suivants:
(1) $\begin{cases} y + 3x + 1 = 0 \\ x + 5 - 2y = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 3x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$

III (1) Résoudre le système d'inéquations suivant :
$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ 2x + 3y - 6 < 0 \end{cases}$
(2) On rajoute au système précédent une inéquation supplémentaire $3y + 4x - 12 > 0$. Quelles sont les solutions de ce nouveau système (compléter votre figure puis justifier grace à cette figure).

IV On se place ici dans un repère orthonormé.
(1a) Trouver les valeurs de x telles que $\vec{U}(3\,;\,2)$ et $\vec{V}(-2x\,;\,2-x)$ soient orthogonaux.
(1b) Pour chaque solution trouvée au (1a), tracer les deux vecteurs dans une figure, puis faire une autre figure pour $x = 1$
(2) Même question qu'au (1a) avec $\vec{U}(\frac{1}{x+1}\,;\,\frac{3x+11}{x+2})$ et $\vec{V}(x+1\,;\,-\frac{1}{x+1})$

DS 08 (correction)

Barême effectif : (I sur 6; II sur 4; III sur 4; IV sur 6).

I (1) $\overrightarrow{AB}(2;3)$ et $\overrightarrow{CD}(-4;-6)$ donc $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$. Ces vecteurs étant donc colinéaires (on peut aussi vérifier l'égalité des produits en croix), (AB) est parallèle à (CD), ce qui signifie que (ABCD) est un trapèze.

(2) $M(x;y)$ est sur la droite (AC) si et seulement si $\overrightarrow{AC}(4;3)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2)$

Donc leurs produits en croix doivent être égaux, c'est à dire $3(x-1) = 4(y-2)$ ce qui donne $4y = 3x+5$ ou encore $\boxed{y = \frac{3x+5}{4}}$

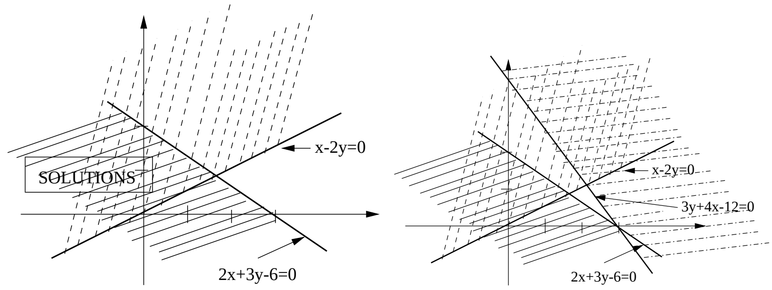
Même principe pour (BD) dont l'équation est $\boxed{y = 3x-4}$

(3) La droite qu'on cherche est perpendiculaire à (AC) dont le coefficient directeur est $3/4$, donc le coefficient directeur de la droite qui nous intéresse doit valoir $-4/3$ pour que le produit des deux fasse -1. Donc cette droite a pour équation $y = -\frac{4}{3}x + b$ et comme elle passe par $E(-3;5)$ on doit avoir $5 = -\frac{4}{3} \times (-3) + b = 4 + b$ ce qui donne $b = 1$. L'équation cherchée est donc $\boxed{y = -\frac{4}{3}x + 1}$

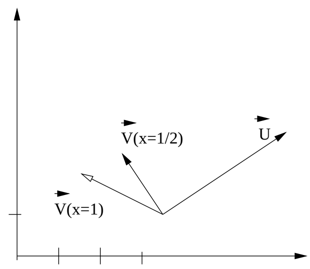
II (1) On peut substituer en utilisant $y = -3x - 1$ par exemple et on obtient $x = -1$ puis $y = 2$. La solution a donc pour coordonnées $(-1;2)$

(2) Ici la méthode par combinaison était plus simple et la solution a pour coordonnées $x = -\frac{6}{13}$ et $y = \frac{30}{13}$

III Sur la figure de droite on a rajouté l'inéquation $3y + 4x - 12 > 0$ dont les solutions sont dans un demi-plan qui ne contient aucune des solutions du système de la question (1) (figure de gauche). Donc on rajoutant cette 3^e inéquation, il n'y a plus du tout de solution.



IV $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si $3 \times (-2x) + 2 \times (2-x) = 0$ dont l'unique solution est $x = 1/2$



(2) Cette fois-ci on doit avoir $(x+1) \times \frac{1}{x+1} + \frac{3x+11}{x+2} \times \left(-\frac{1}{x+1}\right) = 0$ c'est à dire $1 - \frac{3x+11}{(x+2)(x+1)} = 0$ qui se factorise de la façon suivante $\frac{(x+2)(x+1)-(3x+11)}{(x+2)(x+1)} = 0$, on développe ensuite le numérateur $\frac{x^2-9}{(x+2)(x+1)} = 0$ et la forme factorisée est donc $\frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+1)} = 0$.

Les solutions sont donc $x = 3$ ou $x = -3$

DS 09 du 05/06/2000

Toutes vos réponses devront être justifiées et de façon claire, la notation en tiendra compte pour beaucoup.

Barême provisoire : (I sur 8; II sur 6; III sur 6).

I Soit un carré ABCD et deux triangles ABI et BJC équilatéraux tels que I soit dans le carré et J en dehors du carré. Ce problème consiste à démontrer que D, I et J sont alignés.

(1) Rappeler pourquoi dans un triangle équilatéral, les angles valent 60°.

(2) En déduire la valeur de l'angle $\widehat{DAI}$.

(3) De quel type particulier le triangle DAI est il? En déduire à l'aide du (2) la valeur de l'angle $\widehat{ADI}$ puis de l'angle $\widehat{CDI}$.

(4) Donner en le justifiant la valeur de l'angle $\widehat{DCJ}$.

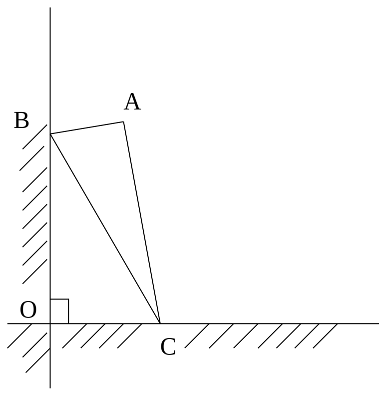
(5) Le triangle DCJ étant isocèle, déduire du (4) la valeur de l'angle $\widehat{CDJ}$. Conclure le problème à l'aide de cette question et de la question (3).

II Tracer un triangle ABI, H est le pied de la hauteur issue de I, Δ est la droite symétrique de (AB) par rapport à (AI), Δ' est la droite symétrique de (AB) par rapport à (BI).

(1) Faire une figure.

(2) Montrer que le cercle de centre I et de rayon IH est tangent à Δ et à Δ', c'est à dire qu'il touche chacune de ces droites en 1 et 1 seul point. (indication : si C est l'intersection de Δ avec Δ', I est alors un point particulier pour ABC, lequel?)

III Glissement d'une équerre On fait glisser les extrémités de l'hypothénuse d'une équerre le long de 2 axes perpendiculaires, comme sur la figure suivante :



(1) Expliquer pourquoi O et A sont sur le cercle de diamètre $[BC]$.

(2) On rappelle que si 4 points M, N, P et Q sont placés dans cet ordre sur un même cercle alors on a $\widehat{PMQ} = \widehat{PNQ}$

En déduire que l'angle $\widehat{COA}$ est toujours égal à l'un des angles de l'équerre (préciser lequel), indépendamment de la position de l'équerre.

(3) En déduire la trajectoire suivie par le point A quand l'équerre glisse en gardant ses deux pointes sur les deux axes. Vous ferez une figure sur laquelle vous représenterez l'équerre dans une position quelconque et vous tracerez la trajectoire du point A en entier.

DS 07 (commun, 2h) correction

I Equations / inéquations : (a) $S = \{-9/2; 9/2\}$
(b) $S = [7/25; +\infty[$ (c) $[-7/4; 5/3]$

II (a) $f(0) = 1$
(b) -1, 2 ou 4 sont les antécédents de 0 (1 seule réponse suffit)
(c) $f(2) = 0$ et $f(3) < 0$ donc $f(3) < f(2)$
(d) f n'est pas croissante sur $[-1; 1]$ car elle décroit pour $x > 0,8$ environ
(e) les solutions de $f(x) = 0$ sont $\{-1; 2; 4\}$ et les solutions de $f(x) = x$ sont $\{1; 6\}$
(f) les solutions de $f(x) \geq 0$ sont $x \in [-1; 2] \cup [4; 7]$ et les solutions de $f(x) \leq x$ sont $x \in [1; 6]$

III (1) La classe modale (celle d'effectif le plus grand) est la classe $[90; 110[$
(2) Entre 70 et 130 secondes, l'effectif est de $19+40+11 = 70$ pour un effectif total de 96, soit environ 73%
(3) $\bar{x} = 95$ et $\sigma = 24,83$
(4) $\bar{x} - \sigma = 70,17$ et $\bar{x} + \sigma = 119,83$
Cet intervalle est inclus dans l'intervalle $[70; 130[$ et on à vu que cet intervalle contient moins de 73% des communications, donc on ne peut pas obtenir les 75% de l'énoncé.

IV (1) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$
Donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc $(DE) \parallel (BC)$
(2a) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KG} = 2\overrightarrow{KC} - 2\overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AK}$
(2b) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{HK} - 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{HA}$
Les vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HA}$ étant colinéaires, H, F et A sont alignés et on peut même ajouter que A est le milieu de $[FH]$

V (1a) $\widehat{ACK} = 180 - \widehat{BCA}$ et $\widehat{DCF} = (90 + 90) - \widehat{BCA}$ (2 angles droits), donc comme les deux expressions précédentes sont les mêmes, $\widehat{ACK} = \widehat{DCF}$
(1b) Si on applique la 1^{ere} formule de l'aire pour les deux triangles, on a montré au (1a) que $\widehat{ACK} = \widehat{DCF}$ et les côtés ont même longueur ($CD = CB = CK$ et $CF = AC$) donc la formule est appliquée dans les 2 cas avec les mêmes nombres, et on obtient donc la même aire.
(2) Pour le triangle ABC on prend $[BC]$ pour base et pour ACK on prend $[CK]$ pour base. Ces deux bases ont même longueur, et la hauteur des 2 triangles est la même, donc la 2^e formule de l'aire donne le même résultat pour ces deux triangles.
(3) En combinant (1b) et (2) on obtient que ABC et DCF ont la même aire.

Aide individualisée du 17/09/1999

Dans tous les calculs demandés, vous détaillerez au maximum possible vos calculs. Certaines questions vous paraîtront peut-être trop faciles, mais ne cherchez pas midi à 14h, ce n'est que pour tester vos connaissances, pas pour vous pieger.

I Quelle est la définition de E^2? (C'est a dire, si on connait le nombre E, comment calculer E^2). Calculer M^2 pour $M = 2$, $M = -2$, $M = 10$, $M = 2E$.

II On appelle E l'expression $(x + y)^2$.
(a)Calculer E dans les situations suivantes: $x = 1$ et $y = 1$; $x = 1$ et $y = -1$; $x = -2$ et $y = 1$.
(b) Expliquer par une phrases l'ordre dans lequel vous faites les opérations comme si vous deviez la calculer sur la machine.
(c) Développer $(x + y)^2$.
(d) Remplacer dans le résultat que vous venez d'obtenir x et y par les valeurs suivantes: $x = -2$ et $y = 1$, $x = 1$ et $y = 1$, $x = 1$ et $y = -1$.

III Développer $(x+a)(x-a)$ sans supposer connue l'identité remarquable. Que vaut l'expression $(x + 2)(x - 2)$ si $x = 2$. Même question si $x = -2$.

IV Traduire les phrases suivantes sous forme de calcul, puis effectuer ce calcul:
(a) Le carré de 2 vaut ......
(b) L'inverse de 2 vaut ......
(c) L'opposé de 2 vaut ......
(d) L'inverse du carré de 2 vaut .....
(e) L'opposé du carré de 2 vaut ......
(f) Le carré de l'opposé de 2 vaut ......
(g) La racine carrée du produit de 4 et de 9 vaut ......
(h) La racine carrée de la somme
des carrés de 2 et de 3 vaut ....
(i) La racine carrée de l'inverse de 4 vaut ......
(j) La racine carrée de l'opposé de 4 vaut ....
(k) Le signe de l'inverse de 4 est: $signe(........) =$
(l) Le signe de l'opposé de 4 est: $signe(........) =$
(m) Le signe de l'opposé de -1 est: $signe(........) =$

V Quand je retranche x au nombre 10 j'obtiens 0, combien vaut x?
Quand je retranche 2 au nombre y j'obtiens 0, combien vaut y?
Quand je multiplie x par -2 j'obtiens 0, combien vaut x?
Quand je multiplie y par 2 j'obtiens -4, combien vaut y?

Résoudre $-2x = 0$; $2 - y = 0$; $0 = 4 + 2y$; $x - 10 = 0$ et faire le lien entre ces équations et les questions précédentes de cet exercice.

VI Calculer (sans calculatrice) pour $x = -10$: $-x^2 + 10$; $(-x)^2 + 10$; $-(x^2 + 10)$
Calculer (sans calculatrice) pour $y = -2$: $y^2 - 8$; $-(-y)^2 - 8$; $-(y^2 + 8)$

VII Simplifier les expressions suivantes:
$\frac{143}{22}$; $\frac{315}{150}$; $\frac{4}{5} + \frac{21}{15}$; $\frac{2}{3} - \frac{6}{15}$; $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{3}$; $\frac{4+8x}{4-4x}$

VIII Dire pour chacune des expressions suivantes s'il s'agit d'une somme, d'un produit, d'une différence ou d'un quotien (il n'y a qu'une réponse à choisir pour chaque):
$10 - x$; $-10x$; $-x + 10$; $9 - y^2$; $\frac{y^2+9}{2}$; $\frac{1}{2}(y^2 + 9)$; $\frac{y^2}{2} + \frac{9}{2}$; $2x^2 - 1$; $(x - 3)(x + 3)$; $x^2 - 9$
Pour chaque expression contenant y, faire une phrase décrivant cette expression (phrase du même type que celles de l'exercice **IV**.

Aide individualisée du 24/09/1999

Dans tous les calculs demandés, vous détaillerez au maximum possible vos calculs. Certaines questions vous paraîtront peut-être trop faciles, mais ne cherchez pas midi à 14h, ce n'est que pour tester vos connaissances, pas pour vous pieger.

I En quoi consiste la factorisation d'une expression? On a $x(x-1) = x^2 - x$, mais quelle est la forme factorisée et pourquoi? Factorisez le plus possible $x(5+10x)$ et $8x+4x^2$.

II Factorisez l'expression $(x+1)^2 - x^2$ (simplifier ensuite le résultat).
Développez l'expression $(x+1)^2 - x^2$ et simplifier la. Comparez ce que vous venez d'obtenir au résultat obtenu à la première question de cet exercice.

III Un volume passe de 325 à $247 cm^3$. Cette variation se traduit elle par :

1. Une multiplication par 0,76 ?
2. Une diminution de $31,5\%$?
3. Une diminution de 24% ?
4. Une division par environ 1,315 ?

Plusieur réponses peuvent être exactes.

IV Une société décide de calculer la prochaine augmentation de salaire de la façon suivante: si on appelle S le salaire d'un employé, on commence par augmenter ce salaire de 3%, et on appelle ce résultat intermédiaire S'. Si S' est plus grand que 13000F, on retire à S' 10% du montant qui dépasse 13000F, ce qui donne le nouveau salaire (on ne fait pas cette opération si S' est plus petit que 13000F).
On suppose S' plus grand que 13000F. Ecrivez le montant du nouveau salaire en fonction du salaire de départ S et en simplifiant l'expression le plus possible.
Calculez ce nouveau salaire quand S vaut respectivement 12900F, 13000F et 20000F, et l'augmentation de salaire que cela représente.

V Donner en le justifiant le signe des expressions suivantes ou expliquez pourquoi on ne peut pas le donner :

- $\sqrt{(-4)^2}$
- $(-x)^2 + 1$
- $(-\sqrt{2})^2$
- $(x+1)(x-1)$
- $(x+1)^2(x-1)^2$
- $\frac{1}{-\sqrt{2}}$

VI Calculez les expressions suivantes en donnant le résultat sous forme de fractions de nombres entiers les plus simples possibles :

1. $E_1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})(2-5)$
2. $E_2 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$

VII Voici les température relevées la même journée (l'après midi) dans plusieurs capitales:
21/28/19/23/23/21/21/22/26/25/25/26/20/25/35/33/30/27
Faire un histogramme. Calculer la moyenne et notez la sur l'histogramme. Calculer la série de nombres $(temperature - moyenne)^2$, puis en déduire la variance et l'écart type.

Aide individualisée du 01/10/1999

I Une société décide de calculer la prochaine augmentation de salaire de la façon suivante: si on appelle S le salaire d'un employé, on commence par augmenter ce salaire de 3%, et on appelle ce résultat intermédiaire S'. Si S' est plus grand que 13000F, on retire à S' 10% du montant qui dépasse 13000F, ce qui donne le nouveau salaire (on ne fait pas cette opération si S' est plus petit que 13000F).
On suppose S' plus grand que 13000F. Ecrivez le montant du nouveau salaire en fonction du salaire de départ S et en simplifiant l'expression le plus possible.
Calculez ce nouveau salaire quand S vaut respectivement 12900F, 13000F et 20000F, et l'augmentation de salaire que cela représente.

II Calculez les expressions suivantes en donnant le résultat sous forme de fractions de nombres entiers les plus simples possibles :

1. $E_1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})(2-5)$
2. $E_2 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$
3. $E_3 = \frac{8}{15} - \frac{35}{21}$
4. $E_4 = \frac{7}{5} : \frac{21}{25}$
5. $E_5 = \frac{2-\frac{6}{5}}{3-\frac{6}{5}}$
6. $E_6 = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15}}$

III Simplifier les fractions suivantes en décomposant chaque nombre en facteurs premiers (par exemple 3087 s'écrira $7^3 \times 3^2$, les facteurs premiers étant dans cet exemple 7 et 3) :

1. $E_1 = \frac{35^2 \times 6^{10}}{14^2 \times 15^5}$
2. $E_2 = \frac{(-2)^5 \times (-5)^9 \times 9^3}{12 \times 5^2 \times 30^5}$
3. $E_3 = \frac{180}{1050}$
4. $E_3 = \frac{252}{60}$

IV (a) En utilisant le fait que $498 = 500 - 2$, calculer sans utiliser de calculatrice ni poser la multiplication le nombre 498^2.
(b) Calculer 57×63 sans calculatrice ni en posant la multiplication sachant que $57 = 60 - 3$ et $63 = 60 + 3$.

V Donner en le justifiant le signe des expressions suivantes ou expliquez pourquoi on ne peut pas le donner :

- $\sqrt{(-4)^2}$
- $(-x)^2 + 1$
- $(-\sqrt{2})^2$
- $(x+1)(x-1)$
- $(x+1)^2(x-1)^2$
- $\frac{1}{-\sqrt{2}}$

VI Simplifier les expressions suivantes :

1. $E_1 = \sqrt{\frac{50}{54}}$
2. $E_2 = 2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} + 2\sqrt{98}$

Aide individualisée 04 du 08/10/1999

I Le problème de Syracuse :
Choisissez un nombre entier quelconque, pas trop grand pour éviter de faire trop de calculs (disons plus petit que 20). Vous allez à partir de ce premier nombre calculer toute une série de nombres entiers. Pour passer d'un nombre quelconque de la liste (noté X_n) au nombre suivant (noté X_{n+1}) on applique une règle qui est la suivante :

- Si X_n est un nombre pair, le suivant est la moitié de X_n
- Si X_n est un nombre impair, le suivant est le triple de X_n auquel on ajoute 1.

Calculer au moins les 10 premiers nombres de la liste, jusqu'à ce que vous observiez une particularité (ne pas en calculer plus de 25). Essayez alors de deviner comment pourrait se continuer cette liste.
Remarque : le comportement que vous avez observé sur cette liste de nombres entiers ne semble pas dépendre du premier nombre de la liste que l'on choisi. Les meilleurs mathématiciens au monde n'on toujours pas réussi à le démontrer rigoureusement.

II On considère une série de 3 nombres A, B et C chacun avec le coefficient 1. La moyenne, notée $\bar{X}$ vaut $(A+B+C)/3$. Pour obtenir la variance on calcule les nombres $a = (A-\bar{X})^2$, $b = (B-\bar{X})^2$, $c = (C-\bar{X})^2$.

(1) Développer a, b et c.
(2) On note M la moyenne des nombres A^2, B^2 et C^2. Ecrire la formule donnant M.
(3) Ecrire la formule donnant la variance V en fonction des nombres a, b et c.
(4) Reécrire la formule de V en utilisant les formes développées au (1). Regrouper ensuite les diff'erents termes de façon obtenir la variance en fonction uniquement de $\bar{X}$ et M que l'on a calculé au (2).

Aide individualisée 06 du 22/10/1999

I Parmi les calculs suivants, effectués de plusieurs façons, certains sont faux. Determiner les calculs faux et indiquez précisément les erreurs (il peut y en avoir plusieur). Si pour un même calcul tous les résultats sont faux, indiquez le bon résultat en faisant vous même le calcul.

(a) $\dfrac{\dfrac{2}{3}}{5-3^{-1}} = \dfrac{2}{15-1} = \dfrac{2}{14} = \frac{1}{7}$

$\dfrac{\dfrac{2}{3}}{5-3^{-1}} = \frac{2}{3}(5^{-1}-3) = \frac{2}{15} - 2 = \frac{2-30}{15} = -\frac{28}{15}$

$\dfrac{\dfrac{2}{3}}{5-3^{-1}} = \dfrac{2}{\dfrac{3}{5-3^{-1}}} = 2 \times \frac{5-3^{-1}}{3} = \frac{10}{3} - 2\frac{3}{3^1} = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$

(b) $\dfrac{3^2 \times 5^3}{9^2 \times 25^2 \times 7} = \dfrac{9 \times 5^3}{9^2 \times 5^4 \times 7} = \dfrac{9 \times 5}{9^1 \times 5^1 \times 7}$
$= \dfrac{9 \times 5}{9 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$

$\dfrac{3^2 \times 5^3}{9^2 \times 25^2 \times 7} = \dfrac{15^5}{(9 \times 25 \times 7)^5} = \left(\dfrac{3 \times 5}{9 \times 25 \times 7}\right)^5$
$= \left(\dfrac{1}{3 \times 5 \times 7}\right)^5 = \dfrac{1}{3^5 \times 5^5 \times 7^5}$

(c) $\left(5 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$\left(5 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Aide individualisée 04 du 08/10/1999

I Le problème de Syracuse :
Choisissez un nombre entier quelconque, pas trop grand pour éviter de faire trop de calculs (disons plus petit que 20). Vous allez à partir de ce premier nombre calculer toute une série de nombres entiers. Pour passer d'un nombre quelconque de la liste (noté X_n) au nombre suivant (noté X_{n+1}) on applique une règle qui est la suivante :

- Si X_n est un nombre pair, le suivant est la moitié de X_n
- Si X_n est un nombre impair, le suivant est le triple de X_n auquel on ajoute 1.

Calculer au moins les 10 premiers nombres de la liste, jusqu'à ce que vous observiez une particularité (ne pas en calculer plus de 25). Essayez alors de deviner comment pourrait se continuer cette liste.
Remarque : le comportement que vous avez observé sur cette liste de nombres entiers ne semble pas dépendre du premier nombre de la liste que l'on choisi. Les meilleurs mathématiciens au monde n'on toujours pas réussi à le démontrer rigoureusement.

II On considère une série de 3 nombres A, B et C chacun avec le coefficient 1. La moyenne, notée $\bar{X}$ vaut $(A+B+C)/3$. Pour obtenir la variance on calcule les nombres $a = (A-\bar{X})^2$, $b = (B-\bar{X})^2$, $c = (C-\bar{X})^2$.

(1) Développer a, b et c.
(2) On note M la moyenne des nombres A^2, B^2 et C^2. Ecrire la formule donnant M.
(3) Ecrire la formule donnant la variance V en fonction des nombres a, b et c.
(4) Reécrire la formule de V en utilisant les formes développées au (1). Regrouper ensuite les diff'erents termes de façon obtenir la variance en fonction uniquement de $\bar{X}$ et M que l'on a calculé au (2).

(d) $\dfrac{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}\times(1+7)} = \left(\frac{1}{5\times 8} + \frac{1}{3\times 8}\right) \times \frac{2}{1}$
$= \dfrac{1}{5\times 4} + \dfrac{1}{3 \times 4} = \dfrac{12+20}{240} = \dfrac{32}{240}$

$\dfrac{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times (\frac{2}{1} - \frac{2}{7}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{12}{7} = \frac{1}{5} + \frac{4}{7} = \frac{27}{35}$

(d) $\dfrac{(a^2b^5c^{-3})^2}{a^4c^{-5}} = \dfrac{a^{2\times 2}b^{5\times 2}c^{-3\times 2}}{a^4c^{-5}} = \dfrac{a^4b^{10}}{c^{-6}}a^4c^{-5}$
$= \dfrac{a^0b^{10}}{c^{-1}} = (ab)^{10} \times c$

$\dfrac{(a^2b^5c^{-3})^2}{a^4c^{-5}} = \dfrac{a^4b^7c^{-1}}{a^4c^{-5}} = \dfrac{b^7}{c^{-4}} = b^7 \times c^4$

II Simplifier :

$\dfrac{(a \times b \times c + b \times c \times d)^2}{b^2c^{-2}a^{-1}} = ...$

$\dfrac{c^4a^2}{(ac+bc)^2 - (bc-ca)^2} = ...$

Aide individualisée 07 du 29/10/1999

I Fractions, puissances

(a) Simplifier les fractions $\frac{126}{135}$ et $\frac{588}{315}$ en décomposant numérateur et dénominateur en produit de facteurs premiers.

(b) Mettre sous la forme d'une seule fraction de deux nombres entiers :
$A_1 = 2^1 - 2^{-1}$ $\qquad$ $A_2 = 7 \times 3^{-1} + 5 \times 4^{-1}$

(c) Simplifier le nombre $\sqrt{3 \times 4^{-1} + 4 \times 3^{-1}}$, puis le nombre $\sqrt{3 \times 4^{-1} \times 4 \times 3^{-1}}$

II Factorisez le plus possible :

(1) $E_1 = x^2z^2 + y^4z^4$
(2) $E_2 = a^5c^2d^2 - a^3b^2d^4$
(3) $E_3 = a^3c^2b^4 - 2a^4cdb^3 + a^5b^2d^2$
(4) $E_4 = x^2y^2 - a^2$
(5) $E_5 = 81y^2 + 36y + 4 = 81y^2 + 2 \times 2 \times 9 \times y + 4 = ...$

Aide individualisée 07 du 29/10/1999

I Fractions, puissances

(a) Simplifier les fractions $\frac{126}{135}$ et $\frac{588}{315}$ en décomposant numérateur et dénominateur en produit de facteurs premiers.

(b) Mettre sous la forme d'une seule fraction de deux nombres entiers :
$A_1 = 2^1 - 2^{-1}$ $\qquad$ $A_2 = 7 \times 3^{-1} + 5 \times 4^{-1}$

(c) Simplifier le nombre $\sqrt{3 \times 4^{-1} + 4 \times 3^{-1}}$, puis le nombre $\sqrt{3 \times 4^{-1} \times 4 \times 3^{-1}}$

II Factorisez le plus possible :

(1) $E_1 = x^2z^2 + y^4z^4$
(2) $E_2 = a^5c^2d^2 - a^3b^2d^4$
(3) $E_3 = a^3c^2b^4 - 2a^4cdb^3 + a^5b^2d^2$
(4) $E_4 = x^2y^2 - a^2$
(5) $E_5 = 81y^2 + 36y + 4 = 81y^2 + 2 \times 2 \times 9 \times y + 4 = ...$

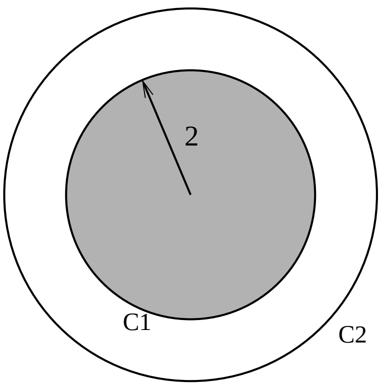
Aide individualisée 08 du 12/11/1999

I Equations

Résoudre les équations suivantes :

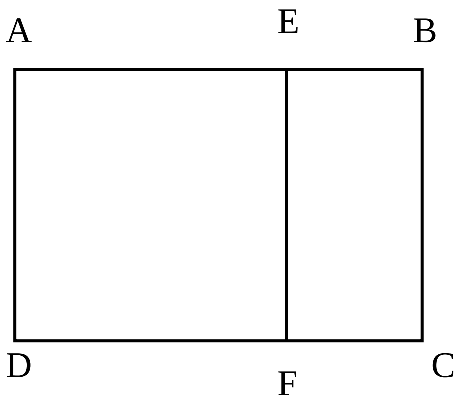
(a) $-2x + 9 + 7(x-1) = 5x + 2$
(b) $-7(x-3) + 5x - 2 = -x + 5$
(c) $-3x + 9 + 7(x-1) = 4x + 3$
(d) $\frac{1}{5x-7} = 0$
(e) $\frac{-3x+7}{5x-7} = 0$
(f) $\frac{x-2}{2x+3} = 1$

II Mise en Equations



(a) Quelle équation poser pour que la couronne blanche ait la même aire que le disque gris?
(b) Résoudre cette équation.

III Mise en Equations



(a) (AEFD) est un carré dont le côté est la largeur du rectangle (ABCD). On appelle format d'un rectangle le rapport $longueur/largeur$ (par exemple vous pourrez vérifier que le format d'une feuille A4 vaut $\sqrt{2}$). On veut que le format de (ABCD) soit le même que le format du rectangle (EBCF), quelle équation peut on poser pour résoudre ce problème?

(b) Si votre équation contient des fractions, mettez tout au même dénominateur.

(c) Vérifier que le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution du problème (ce nombre, appelé "nombre d'or" était déjà utilisé dans l'antiquité en architecture : proportion des colonnes de temples grecs, pyramides...)

Aide individualisée 09 du 19/11/1999

I Equations

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+3} &= \frac{2}{x+5}\\
\frac{(x-1)(3-2(x+3))}{3-x} &= (2x-1)\\
5x^5-3x^3 &= 0\\
(2x-1)^2 &= (1-2x)^2\\
(3-x)^2 &= (x-3)(2x+5)\\
x^2+9 &= 5\\
\frac{1}{x^2-9} &= \frac{1}{(x-3)(x+5)}\\
x^2(3x-1)-2x(1-3x) &= (2x-9)(3x-1)
\end{aligned}$$

II Mise en Equations

Un artiste veut réaliser un cylindre creux, sans couvercle, de hauteur 4cm et transparent. Ce cylindre doit pouvoir contenir une sphère transparente qui repose sur le tour et le fond du cylindre. La sphère est entièrement remplie d'un liquide bleu qui peut se vider dans le cylindre par des trous dans la sphère, et quand le liquide a fini de couler, le cylindre est entièrement rempli de liquide. Trouver les dimensions de l'oeuvre d'art.

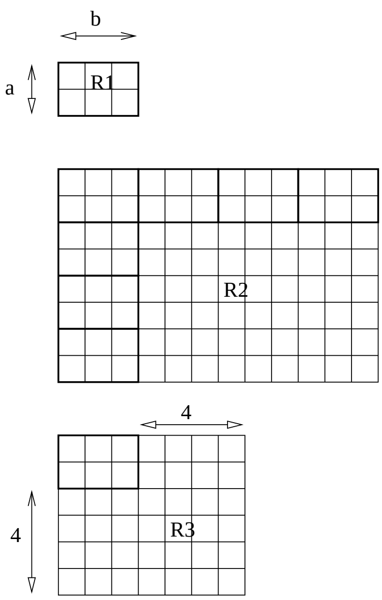
(volume d'une sphère = $4\pi R^3/3$, d'un cylindre = $\pi R^2 \times h$)

Aide individualisée 10 du 26/11/1999

I Faire l'exercice III du Module 10 (d'hier)

II Le format d'un rectangle est le rapport $\frac{Longueur}{Largeur}$. Exprimer le format des rectangles R2 et R3 en fonction des dimensions du rectangle R1 qu'on notera a et b, sans chercher à les remplacer par leur valeur qu'on peut lire sur la figure.

En déduire si R2 ou R3 ont le même format ou non que R1, et comparer votre résultat avec ce que vous observez sur la figure.



III Mise en Equations

Aide individualisée 09 du 19/11/1999

I Equations

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+3} &= \frac{2}{x+5}\\
\frac{(x-1)(3-2(x+3))}{3-x} &= (2x-1)\\
5x^5-3x^3 &= 0\\
(2x-1)^2 &= (1-2x)^2\\
(3-x)^2 &= (x-3)(2x+5)\\
x^2+9 &= 5\\
\frac{1}{x^2-9} &= \frac{1}{(x-3)(x+5)}\\
x^2(3x-1)-2x(1-3x) &= (2x-9)(3x-1)
\end{aligned}$$

II Mise en Equations

Un artiste veut réaliser un cylindre creux, sans couvercle, de hauteur 4cm et transparent. Ce cylindre doit pouvoir contenir une sphère transparente qui repose sur le tour et le fond du cylindre. La sphère est entièrement remplie d'un liquide bleu qui peut se vider dans le cylindre par des trous dans la sphère, et quand le liquide a fini de couler, le cylindre est entièrement rempli de liquide. Trouver les dimensions de l'oeuvre d'art.

(volume d'une sphère = $4\pi R^3/3$, d'un cylindre = $\pi R^2 \times h$)

Un artiste veut réaliser un cylindre creux, sans couvercle, de hauteur 4cm et transparent. Ce cylindre doit pouvoir contenir une sphère transparente qui repose sur le tour et le fond du cylindre. La sphère est entièrement remplie d'un liquide bleu qui peut se vider dans le cylindre par des trous dans la sphère, et quand le liquide a fini de couler, le cylindre est entièrement rempli de liquide. Trouver les dimensions de l'oeuvre d'art.

(volume d'une sphère = $4\pi R^3/3$, d'un cylindre = $\pi R^2 \times h$)

Aide individualisée 13 du 07/01/2000

(1) Trouver dans le livre la définition du sinus d'un nombre réel. Faire une liste des notions qu'il faut connaître pour comprendre cette définition. Mettre cette liste dans un ordre "logique" , c'est à dire que la n^{ieme} notion doit être connue avant la suivante.

(2) Trouver dans le livre la définition du cercle inscrit

(3) Trouver dans le livre la courbe de la fonction cosinus.

(4) Trouver dans le livre un ou deux exercices portant sur l'octaèdre.

(5) On assemble 27 cubes en bois pour faire un cube plus gros de $3 \times 3 \times 3$ cubes et on peint toutes les faces de ce cube plus gros. Sans faire de figure, on voudrais savoir combien de petits cubes ont 3 faces de peintes, 2 faces de peintes, une seule face de peinte et combien en ont aucune...

(6) Faire le 6 page 180: il est conseiller de realiser le cube en papier (je fourni le scotch).

(7) On considère 2 carrés identiques de cotés a. Comment découper ces 2 carrés pour ne faire qu'un seul carré plus grand?
Même question avec un carré de côté b et un carré de côté a tel que $b = 2a$ (indication: quelle est le côté du nouveau carré en fonction de a et b?)

Aide individualisée 13 du 07/01/2000

(1) Trouver dans le livre la définition du sinus d'un nombre réel. Faire une liste des notions qu'il faut connaître pour comprendre cette définition. Mettre cette liste dans un ordre "logique" , c'est à dire que la n^{ieme} notion doit être connue avant la suivante.

(2) Trouver dans le livre la définition du cercle inscrit

(3) Trouver dans le livre la courbe de la fonction cosinus.

(4) Trouver dans le livre un ou deux exercices portant sur l'octaèdre.

(5) On assemble 27 cubes en bois pour faire un cube plus gros de $3 \times 3 \times 3$ cubes et on peint toutes les faces de ce cube plus gros. Sans faire de figure, on voudrais savoir combien de petits cubes ont 3 faces de peintes, 2 faces de peintes, une seule face de peinte et combien en ont aucune...

(6) Faire le 6 page 180: il est conseiller de realiser le cube en papier (je fourni le scotch).

(7) On considère 2 carrés identiques de cotés a. Comment découper ces 2 carrés pour ne faire qu'un seul carré plus grand?
Même question avec un carré de côté b et un carré de côté a tel que $b = 2a$ (indication: quelle est le côté du nouveau carré en fonction de a et b?)

AI 16 du 28/01/2000

I Les fonctions suivantes sont elles paires ou impaires ou ni l'un ni l'autre?

$f_1(x) = 2x - x^3$ $\quad f_2(x) = (x^4 + x^2)^3$

$f_3(x) = (1-x)^4 - (1+x)^4$ $\quad f_4(x) = -x^{16}$

$f_5(x) = \sqrt{1 + x^2 + x^4}$ $\quad f_6(x) = (1-x^3)(1+x^3)$

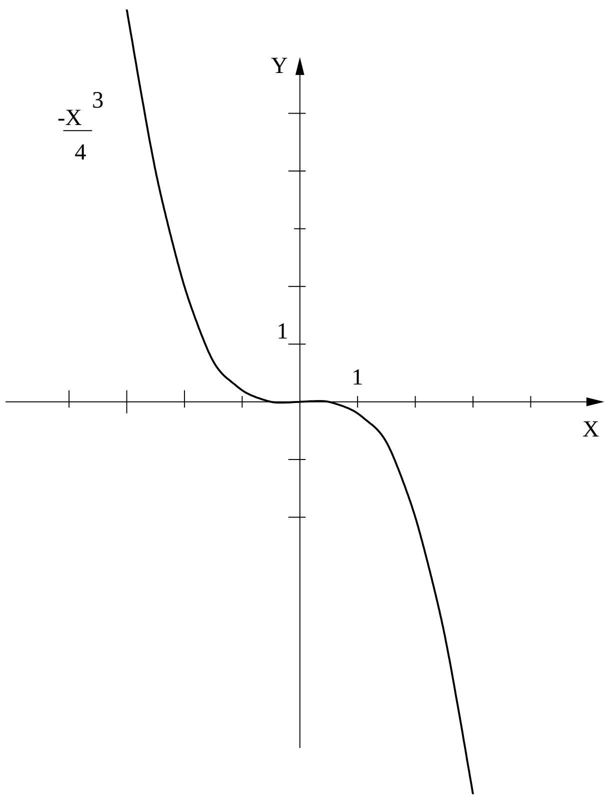
II Sur le graphique de droite on a représenté la courbe de la fonction $x \mapsto -\frac{x^3}{4}$

(1) Résoudre graphiquement $-\frac{x^3}{4} = 1 + \frac{x}{2}$ puis $-\frac{x^3}{4} < 1 + \frac{x}{2}$ (indiquer vos solutions sous forme d'intervalle).

(2) Soit $p(x)$ la fonction paire définie par $p(x) = 2 - x$ pour $x \leq 0$. Tracer la courbe de $p(x)$ sur le graphique et résoudre $-\frac{x^3}{4} = p(x)$ puis $-\frac{x^3}{4} \leq p(x)$

(3) Compléter: "Soit $x > 0$, alors $-x < 0$, donc la définition de p permet d'écrire $p(-x) = 2 - ....$, or on sait de plus que cette fonction est ...., cela veut dire que $p(x) = ...p(..x)$ et si on résume les deux égalités que l'on vient d'écrire on a $p(x) = 2.....$" quand $x > 0$.

III Tracer une fonction paire $g(x)$ telle que $g(x) = \sqrt{x} - 1$ pour $x \geq 0$



AI 17 du 04/02/2000

I (1) Trouver deux nombres $a < 0$ et $b > 0$ pour lesquels la règle $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ est fausse, et deux autres nombres $a < 0$ et $b > 0$ pour lesquels la même règle est vérifiée.
(2) Pour deux nombres a et b négatifs tels que $a < b$, on a donc $0 < -b < -a$. Comparer a^2 et b^2
(3) La règle suivante est elle vraie (justifier votre réponse) $a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
(4) Developper les expressions $(1-\sqrt{2})^2$ et $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$, puis calculer les résultats à la calculatrice et comparer les. En déduire lequel des nombres $1-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ est le plus grand.
(5) Sur un axe, placer approximativement les nombres $a = -\sqrt{3}$ et $b = -\sqrt{2}$, puis les nombres $a' = -2\sqrt{3}$, $b' - 2\sqrt{2}$, puis $a'' = 3\sqrt{3}$ et $b''3\sqrt{2}$
Peut on comparer a' et b' à l'aide de la règle $a < b \Rightarrow a \times c < b \times c$?(justifier)
Même question avec a'' et b''
(6) Sur un axe, placer approximativement les nombres $a = -\sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{3}$, puis les nombres $a' = -1-\sqrt{2}$, $b' - 1 - \sqrt{3}$, puis $a'' = 3-\sqrt{2}$ et $b'' = 3-\sqrt{3}$
Peut on comparer a' et b' à l'aide de la règle $a < b \Rightarrow a + c < b + c$?
Même question avec a'' et b''
Quelles sont les conditions sur les nombres a, b et c pour que cette règle soit vraie.

II (1) Trouver deux nombres a et b vérifiant $a < 2$ et $b < 3$ et dont le produit est supérieur ou égal à 100.
(2) Trouver deux nombres a et b vérifiant $a < 2$ et $b < 3$ et dont le produit est plus petit ou égal à -100.
(3) Peut on trouver deux nombres a et b vérifiant $a < 2$ et $b < 3$ et dont la somme et plus grande que 100? Même question avec une somme plus petite que -100

III Pour faire le patron d'un cube on a utilisé moins de 96 cm^2 de carton. Quel est le plus grand volume possible pour ce cube?

IV (1) Si un nombre x vérifie $4 \geq \frac{1}{x}$, prouver alors qu'on ne peut pas en déduire $x \geq \frac{1}{4}$?
Prouver qu'on a malgré tout $\frac{4x-1}{x} \geq 0$ et chercher pour quelles valeurs de x le numérateur et le dénominateur sont de même signe.
(2) Si un nombre x vérifie $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{x^2+2}$, peut on en déduire que $x^2 + 2 \geq 4$?
Résoudre graphiquement cette inéquation (il est inutile de faire un graphique précis)

AI 18 du 19/05/2000

I Si le nombre a est plus grand que b, on peut trouver un nombre positif c tel que $a = b + c$
Multiplions des deux cotés par $(a-b)$:

$$\begin{aligned} a^2 - ab &= ab + ac - b^2 - bc \\ a^2 - ab - ac &= ab - b^2 - bc \\ a(a-b-c) &= b(a-b-c) \end{aligned}$$

En simplifiant par $(a-b-c)$ on obtient donc que $a = b$ alors que a est censé être plus grand que b. Où est l'erreur?

II Simplifier :

$$\frac{(a \times b \times c + b \times c \times d)^2}{b^2 c^{-2} a^{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{c^4 a^2}{(ac+bc)^2 - (bc-ca)^2}$$

Prouver que $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ (et donc $\neq \sqrt{8}$)

III Parmi les calculs suivants, effectués de plusieurs façons, certains sont faux. Determiner les calculs faux et indiquez précisément les erreurs (il peut y en avoir plusieur). Si pour un même calcul tous les résultats sont faux, indiquez le bon résultat en faisant vous même le calcul.

(a) $\dfrac{\frac{2}{3}}{5-3^{-1}} = \dfrac{2}{15-1} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$

$\dfrac{\frac{2}{3}}{5-3^{-1}} = \frac{2}{3}(5^{-1}-3) = \frac{2}{15} - 2 = \frac{2-30}{15} = -\frac{28}{15}$

$\dfrac{\frac{2}{3}}{5-3^{-1}} = \dfrac{2}{\dfrac{3}{5-3^{-1}}} = 2 \times \frac{5-3^{-1}}{3} = \frac{10}{3} - 2\frac{3}{3^1} = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$

(b) $\dfrac{3^2 \times 5^3}{9^2 \times 25^2 \times 7} = \dfrac{9 \times 5^3}{9^2 \times 5^4 \times 7} = \dfrac{9 \times 5}{9^1 \times 5^1 \times 7}$
$= \dfrac{9 \times 5}{9 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$

$\dfrac{3^2 \times 5^3}{9^2 \times 25^2 \times 7} = \dfrac{15^5}{(9 \times 25 \times 7)^5} = \left(\dfrac{3 \times 5}{9 \times 25 \times 7}\right)^5$
$= \left(\dfrac{1}{3 \times 5 \times 7}\right)^5 = \dfrac{1}{3^5 \times 5^5 \times 7^5}$

(c) $(5 + \frac{2}{3}) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$(5 + \frac{2}{3}) \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

(d) $\dfrac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}} = \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times (1+7)} = \left(\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{3 \times 8}\right) \times \frac{2}{1}$
$= \dfrac{1}{5 \times 4} + \dfrac{1}{3 \times 4} = \dfrac{12+20}{240} = \dfrac{32}{240}$

$\dfrac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times (\frac{2}{1} - \frac{2}{7}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{12}{7} = \frac{1}{5} + \frac{4}{7} = \frac{27}{35}$

(e) $\dfrac{(a^2 b^5 c^{-3})^2}{a^4 c^{-5}} = \dfrac{a^{2\times2} b^{5\times2} c^{-3\times2}}{a^4 c^{-5}} = \frac{a^4 b^{10}}{c^{-6}} a^4 c^{-5}$
$= \dfrac{a^0 b^{10}}{c^{-1}} = (ab)^{10} \times c$

$\dfrac{(a^2 b^5 c^{-3})^2}{a^4 c^{-5}} = \dfrac{a^4 b^7 c^{-1}}{a^4 c^{-5}} = \dfrac{b^7}{c^{-4}} = b^7 \times c^4$