Ecole Normale Supérieure de Lyon, Concours 1990 MP, Mathématiques 1, correction

1-1 Si F est trigonalisable, on peut trouver une base $e_1, ..., e_n$ de V dans laquelle tous les éléments de F ont une matrice triangulaire supérieure. Le vecteur e_1 est alors un vecteur propre commun à tous ces éléments.

1-2 Soit x dans $V_u(\lambda)$, on a pour tout v de F l'égalité $u(v(x)) = v(u(x))$ (par hypothèse sur F) et $u(x) = \lambda x$ du fait que x est dans $V_u(\lambda)$, donc $u(v(x)) = \lambda v(x)$, ce qui signifie que $v(x)$ est encore dans $V_u(\lambda)$, autrement dit que ce sous espace est bien stable par v, quel que soit v de F.

1-3 Soit $F' = Vect(F)$ l'espace vectoriel engendré par la partie F et considérons une base $u_1, ..., u_d$ de F'. Il est suffisant de montrer la propriété pour cette base, par récurrence sur d. Si $d = 1$ c'est immédiat. Si pour tout ensemble fini $< d$ de matrices commutant 2 à 2 la propriété est vérifiée, comme nous sommes dans $\mathbb{C}$, u_d possède au moins un vecteur propre donc $V_{u_d}(\lambda)$ est de dimension non nulle pour au moins un nombre λ. Ce sous espace est stable par $u_1, ..., u_{d-1}$ car les endomorphismes commutent 2 à 2, en appliquant le 1-2. La restriction des $u_1, ..., u_{d-1}$ à $V_{u_d}(\lambda)$ contient donc par hypothèse de récurrence un vecteur propre commun à $u_1, ..., u_{d-1}$, qui sera donc aussi vecteur propre de u_d car appartenant à $V_{u_d}(\lambda)$, ce qui termine la récurrence.

1-4 Comme au 1-3 il est suffisant de montrer la propriété sur une base $u_1, ..., u_d$ de l'espace vectoriel engendré par F. On applique une récurrence, cette fois sur la dimension de l'espace V. Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Supposons qu'en dimension strictement inférieure à n, toute famille d'endomorphismes commutant 2 à 2 est une famille trigonalisable, et soit alors e un vecteur propre commun à tous les éléments de F (cf 1-3) et H un supplémentaire de $Vect(e)$ et π le projecteur sur H parallèlement à e. La restriction des $\pi \circ u_k$ à H sont des endomorphismes de H et nous allons montrer que ces endomorphismes commutent 2 à 2. Si h est un vecteur de H, pour tout entier k on peut décomposer le vecteur $u_k(h)$ sur $H \oplus \mathbb{C}.e$ sous la forme $u_k(h) = h_k + c_k.e$ (h_k est un élément de H et c_k un nombre complexe). On a donc

$$\begin{aligned}(\pi u_k)(\pi u_l)(h) - (\pi u_l)(\pi u_k)(h) &= (\pi u_k)\pi(h_l + c_l.e) - (\pi u_l)\pi(h_k + c_k.e) \\ &= (\pi u_k)(h_l) - (\pi u_l)(h_k) \\ &= \pi u_k(u_l(h) - c_l.e) - \pi u_l(u_k(h) - c_k.e)\end{aligned}$$

Le premier et le troisième termes s'annulent du fait que $u \circ v = v \circ u$ et les 2 autres termes sont nuls car e est un vecteur propre commun aux u_k et que par définition de π on a $\pi(e) = 0$. Le résultat est donc nul, ce qui signifie que les opérateurs (πu_k) commutent et on peut donc appliquer la récurrence.

1-5 Soit $F' = Vect(F)$ l'espace vectoriel engendré par la partie F. F' est de dimension finie et nous allons montrer qu'une base quelconque $f_1....f_k$ de F' est diagonalisable , F' sera donc aussi diagonalisable et a fortiori ce sera le cas aussi pour F. Procédons par récurrence sur k. Le cas de $k = 1$ est immédiat. Supposons que pour toute famille $\{f_1, ..., f_{k-1}\}$ composée de $k - 1$ endomorphismes diagonalisables d'un espace de dimension finie, commutant 2 à 2 soit toujours diagonalisable en tant que famille (c'est à dire qu'il existe une base commune les diagonalisant tous). Si f_k est un autre endomorphisme diagonalisable commutant avec les f_i ($1 \leq i \leq k - 1$) alors nous avons que $V = \oplus_i V_{f_k}(\lambda_i)$ où $V_{f_k}(\lambda_i)$ est le sous espace propre de f_k associé à la valeur propre λ_i. Pour tout i et tout $j < k$, $V_{f_k}(\lambda_i)$ est stable par f_j, on peut donc considérer la restriction des $k-1$ endomorphismes $\{f_1, ..., f_{k-1}\}$ sur $V_{f_k}(\lambda_i)$ et y appliquer la récurrence. Comme f_k est une homothétie sur ce sous espace on aura pu diagonaliser les $\{f_1, ..., f_k\}$ sur $V_{f_k}(\lambda_i)$ quel que soit i, donc aussi sur V qui est somme directe de tous ces sous-espaces.

1-6 A la question 1-5 la nature du corps n'intervient pas, et on a la même réponse positive avec le même raisonnement. [NDR: cela ne s'appliquerait pas à la trigonalisabilité car si on suppose F composé de matrices trigonalisables rien ne permet de dire que les operateurs du 1-4 projetés sur et restreints à un sous espace sont eux même trigonalisables. Au 1-4 l'hypothèse $K = \mathbb{C}$ est donc nécessaire]

2-1 u_0,v_0 est une base de F (s'ils étaient colinéaires on aurait $[u_0, v_0] = 0$). De même u'_0,v'_0 est une base de F'. On pose $w_0 = [u_0, v_0]$, $w'_0 = [u'_0, v'_0]$. w_0 est donc forcément non colinéaire soit à u_0 soit à v_0, nous ferons l'hypothèse que w_0 est non colinéaire à u_0 quitte à permuter u_0 et v_0, et de même nous supposons w'_0 non colinéaire à u'_0, nous définissons alors une application linéaire ϕ dans cette base sous la forme. $\phi(w_0) = w'_0$ et $\phi(u_0) = au'_0 + cw'_0$.

Si $u = xu_0 + yw_0$ et $v = x'u_0 + y'w_0$ sont 2 éléments quelconques de F alors $\phi([u, v]) = \phi([xu_0 + yw_0, x'u_0 + y'w_0]) = (xy' - x'y)\phi([u_0, w_0])$ Et d'un autre côté on a: $[\phi(u), \phi(v)] = (xy' - x'y)[\phi(u_0), \phi(w_0)]$ et comme $[\phi(u_0), \phi(w_0)] = a[u'_0, w'_0]$ on a que $[\phi(u), \phi(v)] = (xy' - x'y)a[u'_0, w'_0]$

L'égalité voulue sera donc vraie si et seulement si $\phi([u_0, w_0]) = a[u'_0, w'_0]$

Comme u_0 , v_0 est une base , il existe 2 nombres p et q tels que $[u_0, v_0] = pu_0 + qv_0$ donc $[u_0, w_0] = [u_0, [u_0, v_0]] = qw_0$ et il existe p' et q' tels que $[u'_0, v'_0] = p'u'_0 + q'v'_0$ donc $[u'_0, w'_0] = [u'_0, [u'_0, v'_0]] = q'w'_0$

On doit donc avoir $\phi(qw_0) = aq'w'_0$ Il suffit donc de choisir $a = q/q''$ (q et q' sont non nuls par hypothèse).

2-2 x étant dans W et v dans I, $v(x) = l(v)x$ ce qui initie la récurrence. Si $v(x_{k+1}) - l(v)x_{k+1} = v(u(x_k)) - l(v)u(x_k)$. mais $v(u(x_k)) - u(v(x_k)) = [u, v](x_k)$ et comme $[x, v]$ est dans I car I est un idéal, $[u, v](x_k) - l([u, v])x_k$ appartient à $Vect(x_0 ... x_{k-1})$ par hypothèse de récurrence. On a de même que $v(x_k) - l(v)x_k$, donc $u(v(x_k)) - l(v)u(x_k)$ appartient à $Vect(x_1, ..., x_k)$. Donc comme l'égalité précédente se re-écrit $v(u(x_k)) = u(v(x_k)) + [u, v](x_k)$ ou encore $v(u(x_k)) - l(v)u(x_k) = u(v(x_k)) - l(v)u(x_k) + [u, v](x_k)$, la somme des 2 premiers termes appartenant à $Vect(x_1, ..., x_k)$ et le dernier à $Vect(x_0 ... x_{k-1})$, le vecteur $v(x_{k+1}) - l(v)x_{k+1}$ appartient bien à $Vect(x_0 ... x_k)$ ce qui termine la récurrence.

2-3 La stabilité par u est évidente, par I est conséquence immédiate du 2-2.

2-4 Comme I est un idéal, $[u, v]$ est dans I, U est alors stable par $[u, v]$ et on peut donc considérer la restriction de $[u, v]$ à U. Soit d le plus petit entier tel que $\{x_0, , , x_d\}$ engendre U, on vérifie facilement que la famille est libre et forme une base dans laquelle on peut considérer la matrice de $[u, v]$. $[u, v](x_k) = l([u, v])x_k + \delta$ avec δ dans $Vect(x_0 ... x_{k-1})$ La matrice est donc triangulaire supérieure avec pour unique valeur propre $l([u, v])$. On a donc immédiatement $Tr([u, v]) = dim(U)l([u, v]) = (d + 1)l([u, v])$.

2-5 Soit x quelconque dans W et u quelconque dans F. Quel que soit v dans I, $v(u(x)) = [v, u](x) + uv(x) = [v, u](x) + l(v)u(x)$ Montrons que $[v, u](x) = 0$. Définissons U comme au 2-3, U est stable par u et par I donc par v, on peut donc considérer les restriction à U de u et v. Comme $Tr(uv) = Tr(vu)$, la trace étant considérée sur la restriction à U, on a que $Tr([u, v]) = 0$ et du 2-4 on déduit que $l([u, v]) = 0$. Or $[v, u](x) = l([u, v])x$ donc $[v, u](x) = 0$. On obtient finalement que $v(u(x)) = l(v)u(x)$ donc $u(x)$ est bien dans W.

2-6 en dimension 1 c'est évident, le commutateur de deux éléments étant toujours nul. En dimension 2, soit le commutateur de 2 éléments est toujours nul et on a terminé, soit il existe toujours un commutateur non nul et d'après le 2-1, deux algèbres de Lie de ce type sont toujours isomorphes (algébriquement), il suffit donc d'en expliciter une qui soit résoluble.

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

alors $[u, v] = -2u$ et il est facile alors de voir alors que $[F, F] = Vect(u)$ et que donc elle est résoluble. [NDR préciser au préalable par un calcul simple que l'image d'une algèbre de Lie résoluble par un isomorphisme d'algèbre de Lie donne encore une algèbre résoluble.]

2-7 On montre facilement que F_{p-1} est un idéal. L'ensemble des idéaux de F non triviaux est donc non vide. Soit I un idéal non nul quelconque contenant F_{p-1} alors l'espace vectoriel engendré par I et un élément u qui n'est pas dans I est de dimension $dim(I) + 1$ et est aussi un idéal de F car tout commutateur d'un élément de $I \oplus \mathbb{C}.u$ avec un élément quelconque de F est a fortiori un commutateur de F, qui se trouve donc dans F_{p-1} , donc dans I et donc dans $I \oplus \mathbb{C}.u$. On peut donc construire une suite croissante d'idéaux entre F_{p-1} et F_p dont les dimensions augmentent de 1 à chaque fois. Celui qui sera de dimension $d-1$, qu'on note $\mathcal{I}$, répond à la première question et il est résoluble car $F_0 \subset ... \subset F_{p-1} \subset \mathcal{I}$ et comme $[F_p, F_p] \subset F_{p-1}$ on a a fortiori $[\mathcal{I}, \mathcal{I}] \subset F_{p-1}$.

2-8 Par récurrence sur la dimension de l'algèbre: En dimension 1 c'est évident car $K = \mathbb{C}$. De par 2-7 on a $F = \mathcal{I} \oplus \mathbb{C}.u$. Soit $V_u(\lambda)$ un sous espace propre de u. et e un vecteur de ce sous espace Soit e un vecteur propre commun à $\mathcal{I}$ (hypothèse de récurrence) pour tout v dans $\mathcal{I}$ on a $v(e) = l(v).e$, $l(v)$ étant une forme linéaire sur l'idéal $\mathcal{I}$ de F. L'espace W défini plus haut contenant e est donc stable par F (2-5) La restriction à W de u possède donc un vecteur propre et comme x est dans W, x, vérifie aussi $v(x) = l(v)x$ pour tout v dans $\mathcal{I}$, c'est donc un vecteur propre commun.

2-9 Récurrence similaire au 1-3 sur la dimension de V. Si e est un vecteur propre commun à F, u_k une base de F adaptée à la suite croissante de sous algèbres, et H désigne un supplémentaire de $Vect(e)$ et π le projecteur sur H parallèlement à e. La restriction à H des $\pi \circ u_k$ à H sont des endomorphismes de H et nous allons montrer que ces endomorphismes forment une algèbre résoluble. Si h est un vecteur de H, pour tout entier k on peut décomposer le vecteur $u_k(h)$ sur $H \oplus \mathbb{C}.e$ sous la forme $u_k(h) = h_k + c_k.e$ (h_k est un élément de H et c_k un nombre complexe). On a donc

$$\begin{aligned}
(\pi u_k)(\pi u_l)(h) - (\pi u_l)(\pi u_k)(h) &= (\pi u_k \pi)(h_l + c_l.e) - (\pi u_l \pi)(h_k + c_k.e) \\
&= (\pi u_k)(h_l) - (\pi u_l)(h_k) \\
&= \pi u_k(u_l h - c_l.e) - \pi u_l(u_k h - c_k.e) \\
&= \pi[u_k, u_l](h) - c_l \pi u_k(e) + c_k \pi u_l(e)
\end{aligned} \tag{2}$$

Les 2 derniers termes sont nuls car e est un vecteur propre commun aux u_k et que par définition de π on a $\pi(e) = 0$. Si u_k et u_l sont dans un F_j pour un certain entier j, alors $\pi[u_k, u_l]$ est dans l'ensemble des endomorphismes de πF_{j-1} composé des πw avec $w \in F_{j-1}$ restreints à H. On vérifie que c'est une sous algèbre de l'ensemble des πu pour u décrivant F_j et on a donc montré que $[\pi F_j, \pi F_j] \subset \pi F_{j-1}$, donc que πF_p est résoluble et donc par hypothèse de récurrence, trigonalisable. F_p est donc aussi trigonalisable puisque e est un vecteur propre commun.

2-10 montrer que les commutateurs d'endomorphismes d'une telle algèbre de lie sont formés de matrices nilpotentes, et que les commutateurs de telles matrices sont de degré de nilpotence plus élevée que chacune des matrices du commutateur, ce qui permet aisément de construire la suite croissante de sous algèbres.

2-11 Si F est formée de matrices commutantes alors $[F, F] = \{0\}$, F est donc résoluble et la suite de sous algèbres est formée de l'algèbre nulle et de F. 1-4 est donc un corolaire du théorème de Lie (2-9).

3-1 Calcul élémentaire

3-2 Si $u^n = 0$ alors on constate dans le calcul de ad_u^{2n} que cette expression fait apparaitre dans chaque terme une puissance de u au moins égale à n. Et donc $ad_u^{2n} = 0$

3-3 Posons $\pi(g)(h) = q([g, h])$ pour h dans H. Pour tout u de F $u = q(u) + g'$ avec $g' \in G$. $\pi(g)(q(u)) = q([g, q(u)]) = q([g, u - g'])$ or $[g, g']$ est un élément de G car c'est une algèbre de Lie, donc $q([g, g']) = 0$ et on a bien $\pi(g)(q(u)) = q([g, u])$ Unicité: soit π et π' deux telles applications alors $\pi'(g)(q(u)) = \pi(g)(q(u))$, donc en particulier si u est dans H auquel cas $q(u) = u$ donc pour tout g dans G et u dans H on a $\pi'(g)(u) = \pi(g)(u)$, autrement dit $\pi = \pi'$.

3-4 F' est constitué des endomorphismes de H définis par $h \mapsto \pi(g)(h) = q([g, h])$ pour tout u de G, Le commutateur de deux tels endomorphismes s'écrit $\pi(g)(\pi(g')(h)) - \pi(g')(\pi(g)(h)) = q([g, q([g', h])]) - q([g', q([g, h])])$ Or on a $q([g, h]) = [g, h] - g_1$ pour un certain g_1 de G et de même $q([g', h]) = [g', h] - g'_1$ et $q([g, q([g', h])]) = q([g, [g', h] - g'_1]) = q([g, [g', h]])$ car $[g, g'_1]$ est dans G donc $q([g, g'_1]) = 0$ et de même $q([g', q([g, h])]) = q([g', [g, h]])$. On a finalement

$$\begin{aligned}\pi(g)(\pi(g')(h)) - \pi(g')(\pi(g)(h)) &= q((ad_g ad_{g'} - ad_{g'} ad_g)(h)) \\ &= q(ad_{[g,g']}(h)) \\ &= \pi([g,g'])(h)\end{aligned}$$

(on a utilisé le résultat du 3-1). F' est donc bien une algèbre de Lie. Si les g_i forment une base de G, les endomorphismes $\pi(g_i)$ engendrent F', donc $dimF' \leq dimG < dimF$. Un élément $\pi(g)$ est nilpotent car en effet si on compose $\pi(g)^m$ on a que pour tout h dans H on a $\pi(g)^m(h) = q([g, q([g, ...q([g,h])....]) = q([g,[g,[g...[g,h]]]]))$ d'après le même raisonnement qu'au début de cette question. Comme on a vu que ad_g est nilpotent (3-2) il en résulte que $\pi(g)$ l'est aussi.

3-5 Il faut lire évidemment G idéal de G_1 et non le contraire, mais un candidat capable d'arriver à cette question s'en rendra compte aisément. On construit F' comme à la question précédente. On a que $dim(F') < dim(F)$ et que F' est composé d'éléments nilpotents, l'hypothèse de cette question induit l'existence d'un élément x de H se trouvant dans le noyau de tous les $\pi(g)$. Il vérifie donc $q([g,x]) = 0$ pour tout g de G, donc $[g,x] \in G$. On en conclut que $G_1 = G \oplus \mathbb{C}.x$ forme une algèbre de Lie et que ce qui précède montre aussi que G est un idéal de G_1. $dim(G_1) = dim(G) + 1$ car sinon x serait un élément de G, et comme il est par définition dans H et que G et H sont en somme directe il serait nul.

3-6 Le 3-5 fournit un raisonnement par récurrence sur la dimension de l'algèbre qu'il suffit d'initier pour conclure. En effet il suffit de montrer l'existence d'une sous algèbre stricte de F, or si F est de dimension strictement plus grande que 1, tout élément de F engendre une sous algèbre de dimension 1 qui convient car le commutateur de 2 éléments est alors toujours nul. Pour initier la récurrence il suffit de constater que dans une algèbre de Lie de dimension 1 composée d'éléments nilpotents, on peut trouver un vecteur non nul qui sera dans le noyau de tous les endomorphismes de l'algèbre, en prenant un élément quelconque du noyau d'un générateur de l'algèbre.

3-7 Comme dans la partie 1, on procède par récurrence sur la dimension de V. La dimension 1 est immédiate, en dimension supérieure le 3-6 permet d'exhiber un élément x non nul dans l'intersection des noyaux. On considère H un supplémentaire de $\mathbb{C}.x$ dans V et Π la projection sur H parallèlement à $\mathbb{C}.x$. Pour tout u dans F en notant $u_H = \Pi \circ u|_H$, l'ensemble des u_H forment une algèbre de Lie d'endomorphismes de H par un calcul similaire au 2-9. Les u_H sont tous nilpotents. Une trigonalisation par blocs le montre immédiatement, sinon de façon équivalente on peut les re-écrire sous la forme $u_H = \Pi \circ u \circ \Pi$. Π étant un projecteur on a : $u_H^n = \Pi u \Pi u....\Pi u \Pi$ et pour tout y de H, $\Pi(y) = y - \lambda.x$ pour un certain λ dépendant de y. Donc

$$\begin{aligned}u_H^n(y) &= \Pi u \Pi u....u \Pi u \Pi(y) \\ &= \Pi u \Pi u....u \Pi u(y) \\ &= \Pi u \Pi u....u(u(y) - \lambda x) \\ &= \Pi u \Pi u....uu(y)\end{aligned}$$

(car $u(x) = 0$) et ainsi de suite et on obtient $u_H^n(y) = \Pi u^n(y) = 0$ pour n suffisamment grand car u est nilpotent. Ayant obtenu une algèbre de Lie d'endomorphismes nilpotents sur un espace de dimension strictement inférieure à celle de V on peut appliquer la récurrence et conclure.

Rédigé par: Eric Chopin , 22/01/2017
(eric point chopin at wanadoo point fr)