

Université de Savoie

TESTS DU SECTEUR SCALAIRE DE LA THEORIE  
ELECTROFAIBLE

par

ERIC CHOPIN

Département de Physique Théorique

Laboratoire ENSLAPP

Thèse présentée au Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des

Particules

en vue de l'obtention du grade de

Docteur ès Sciences

en Physique Théorique

décembre, 1996



Université de Savoie  
Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules

Cette thèse intitulée :

TESTS DU SECTEUR SCALAIRE DE LA THEORIE  
ELECTROFAIBLE

présentée par :

ERIC CHOPIN

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Daniel Décamp,	président du jury
Fawzi Boudjema,	directeur de thèse
Fernand Renard,	rapporteur
Pierre Chiappetta,	rapporteur
Geneviève Bélanger,	membre du jury
Jean-Loïc Kneur,	membre du jury

Thèse acceptée le 13 décembre 1996

## Résumé

Dans les accélérateurs de particules existants tels que le LEP près de Genève, la physique du Modèle Standard a déjà été bien vérifiée. Les travaux actuels sont centrés sur des mesures de précision des paramètres du modèle et l'analyse d'événements rares grâce auxquels on pourrait découvrir une nouvelle physique. Un des secteurs les moins compris du Modèle Standard est l'origine de la masse des bosons  $Z$  et  $W$  pour lesquels un modèle de brisure de symétrie de jauge a été imaginé. Ce modèle fait intervenir une (ou plusieurs) particule, le boson de Higgs qui n'a toujours pas été trouvé. La découverte et l'analyse du boson de Higgs est un des enjeux majeur de la physique des particules aujourd'hui. C'est pour cela que sont développés des projets de collisionneurs à très haute énergie (LHC, NLC, ...) qui seraient susceptibles de mettre en évidence cette physique. L'analyse des processus étant de plus en plus délicate, à cause des nombreuses particules impliquées, il faut se doter d'outils de calculs puissants tels que la méthode des amplitudes hélicités et des techniques telles que les choix de jauges adaptées pour simplifier les calculs. Nous avons développé des outils dans ces deux domaines qui seront exposés dans cette thèse. Nous nous sommes intéressé de près à la façon dont on pourrait mesurer les self-couplages du boson de Higgs qui vont décrire de quelle façon la symétrie de jauge est brisée. Nous avons calculé pour cela plusieurs processus, et nous avons trouvé que le couplage à 4 Higgs est hors de portée expérimentale, mais que le couplage à 3 Higgs est mesurable à l'aide d'une observable qui nous semble suffisamment sensible dans ce couplage. Parmi ces processus que nous avons calculés, certains peuvent être décrits en termes de fonctions de structure donnant le contenu en  $W$  longitudinal dans le photon. Nous avons approfondi ce sujet assez récent et détaillé le formalisme des fonctions de structure, que nous avons redérivées et en partie testées.

## Mots-clefs

amplitudes hélicités, brisure de symétrie, Higgs, jauges non-linéaires, fonctions de structure, invariance de jauge, unitarité, LEP, LHC, NLC

# Table des matières

Résumé .....	iv
Table des matières .....	iv
Table des matières	v
Remerciements .....	xi
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Historique . . . . .	1
1.2 Le lagrangien de Glashow, Salam et Weinberg . . . . .	8
<b>2 Tester le Modèle Standard</b>	<b>11</b>
2.1 Processus $e^+e^- \rightarrow 3$ photons . . . . .	11
2.1.1 Motivations . . . . .	11
2.1.2 Amplitude QED . . . . .	12

2.1.3	Lagrangien effectif $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ . . . . .	16
2.1.4	Analyse par Monte Carlo . . . . .	18
2.1.5	Conclusion de cette étude . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Comparaison entre différentes façons de “fixer” la jauge</b>	<b>27</b>
3.1	Jauges non-linéaires et jauge de 't Hooft-Feynman . . . . .	28
3.1.1	Le théorème d'équivalence . . . . .	31
3.2	Jauges de fond . . . . .	33
3.3	Technique “Pinch” . . . . .	35
3.4	Jauge de Gervais-Neveu inspirée des cordes, factorisation des couleurs	37
3.4.1	Factorisation des couleurs et méthode XZC . . . . .	37
3.4.2	Limite de tension infinie des cordes <i>à la</i> Polyakov . . . . .	40
3.5	En résumé . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Tester le potentiel de Higgs</b>	<b>43</b>
4.1	Extensions possibles au modèle de brisure de symétrie . . . . .	43
4.1.1	Les collisionneurs $\gamma\gamma$ . . . . .	45
4.1.2	Les spectres de photons . . . . .	47
4.2	Le processus $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ . . . . .	51

4.2.1	Propriétés de $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ . . . . .	51
4.2.2	Analyse du processus en jauge unitaire . . . . .	52
4.2.3	Intérêt de la jauge $R_\xi$ non linéaire . . . . .	54
4.2.4	Jauge $R_\xi$ modifiée et jauge de fond . . . . .	54
4.3	Espace de phase à 4 particules finales . . . . .	56
4.4	Résultats . . . . .	59
4.4.1	Tests de validité de l'amplitude . . . . .	59
4.4.2	Sections efficaces . . . . .	60
4.4.3	Quelques propriétés de $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ . . . . .	67
4.4.4	Nouveaux résultats incluant les spectres de photons . . . . .	69
4.5	Le couplage $H^3$ . . . . .	69
4.5.1	Une observable intéressante . . . . .	75
4.5.2	En résumé . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Améliorations des fonctions de structure</b>	<b>85</b>
5.1	Considérations générales . . . . .	85
5.1.1	La sélection de graphes de Feynman . . . . .	85
5.1.2	Principe de décomposition de l'amplitude . . . . .	90

5.1.3	Bref rappel sur les variables cinématiques . . . . .	93
5.1.4	Relations entres les trois paramètrages . . . . .	97
5.1.5	Quelques difficultés . . . . .	98
5.2	Dérivation des fonctions de structure . . . . .	103
5.2.1	Comparaisons des fonctions de distribution en $W_L$ dans un électron ou dans un photon . . . . .	103
5.2.2	L'invariance de jauge . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Quelques tests des fonctions de structure</b>	<b>117</b>
6.1	Le processus $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$ . . . . .	117
6.1.1	Le sous processus $W^+ W^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e$ . . . . .	119
6.1.2	Du résultat exact aux approximations . . . . .	119
6.2	Le processus $\gamma W^+ \rightarrow W^+ H H$ . . . . .	126
6.2.1	$W^+ W^- \rightarrow H H$ . . . . .	128
6.2.2	Comparaison entre résultats exacts et approximatés. . . . .	129
<b>7</b>	<b>Application des nouvelles méthodes à la double convolution</b>	<b>139</b>
7.1	Reparamétrage de l'espace des phases . . . . .	139
7.1.1	Cas de 4 particules ou plus dans l'état final . . . . .	145
7.2	Comparaison entre Monte-Carlo exact et convolution . . . . .	149



7.2.1	$\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$ . . . . .	149
7.3	Application à la production de paires de Higgs . . . . .	150
7.3.1	Approximation de la section efficace de $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$ . . .	150
7.3.2	Approximation de $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ . . . . .	155
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>165</b>
<b>9</b>	<b>Annexe A : amplitudes hélicités</b>	<b>169</b>
9.1	Remarques . . . . .	176
9.2	Application a la production de paires de neutrinos . . . . .	177
9.3	Symétries de l'équation de Dirac . . . . .	178
9.4	Lagrangiens quadratiques . . . . .	181
9.4.1	Cas d'un champ de jauge abélien ( $U(1)_{em}$ ) . . . . .	181
9.5	Invariance de jauge en QED scalaire . . . . .	185
<b>10</b>	<b>Annexe B : règles de Feynman en jauge non linéaire</b>	<b>189</b>
10.1	Conventions générales . . . . .	189
10.2	Règles de Feynman . . . . .	194
<b>11</b>	<b>Annexe C : identités de Ward-Takahashi</b>	<b>203</b>
11.1	Identités de Ward-Takahashi . . . . .	203

<b>12 Annexe D. Factorisation de l'espace de phase</b>	<b>209</b>
12.1 Cas de trois particules dans l'état final, avec deux désintégrations primaires . . . . .	209
<b>Bibliographie</b>	<b>213</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>215</b>

## Remerciements

Mes plus chaleureux remerciements vont à mes amis proches, dont le soutien moral et affectif m'a été essentiel; à Fawzi, qui m'a accepté dans son équipe, et dont les compétences scientifiques m'ont aidé à travailler sur un sujet de recherche intéressant et en plein coeur de l'actualité scientifique; à Geneviève Bélanger et Marc Baillargeon avec qui il était agréable de travailler et discuter; à Vincent Lafage, mon incontournable collègue de bureau avec qui les échanges scientifiques, et autres, m'ont été très profitables.

Je souhaite aussi remercier mes collègues de l' ENSLAPP, avec qui la vie dans le laboratoire est très agréable. Je suis particulièrement reconnaissant au LAPP de m'avoir enduré pendant trois ans sans trop broncher. Je remercie aussi Daniel Décamp, Pierre Chiappetta et Fernand Renard d'avoir eu la gentillesse de faire partie de mon jury malgré le peu de temps que leurs responsabilités leur laisse, ainsi que les autres membres du jury, qui ont pris le temps d'étudier ce document.

Merci aussi à Jean Orloff pour d'intéressantes discussions aussi bien sur la théorie des cordes que sur le parapente, à Georges Girardi qui a subi avec patience mes questions diverses de théorie des champs. Je tiens à remercier aussi les physiciens extérieurs au laboratoire avec qui j'ai eu des contacts fructueux pour mes travaux, en particulier Xavier Artru, George Jikia, Ilya Ginzburg et Slava Ilyin.

Mes derniers remerciements vont aux pays de savoie où il fait bon vivre, et en particulier à Annecy, aux pubs annéciens, et à tous les amis que j'ai dans la région.

A ma nièce Anaïs

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Historique

C'est dans les années soixantes que pour la première fois on a pu unifier des interactions fondamentales différentes dans une même théorie. Au bout d'une longue démarche scientifique qui a impliqué de très nombreux physiciens, Glashow, Weinberg et Salam [1, 2, 3] ont trouvé le moyen de réunir dans un même formalisme l'interaction électromagnétique et l'interaction faible. C'est ainsi qu'est né le nom "Interaction électrofaible". Cette théorie repose sur un groupe de symétrie local  $SU(2) \times U(1)$  qui comporte 4 générateurs, et qui donc décrit les interactions comme étant véhiculées par 4 particules intermédiaires : le photon, le  $Z^0$ , le  $W^+$  et le  $W^-$ . On aurait pu se contenter de cette élégante théorie si elle ne soulevait un problème majeur : le  $Z^0$  et les  $W$ , qui ont depuis été découverts dans des expériences s'avèrent être des particules lourdes [4, 5], et cette masse des particules d'interaction n'est pas compatible avec la symétrie  $SU(2) \times U(1)$ .

Différents remèdes ont été imaginés pour tenter de comprendre ce problème. Dans

tout les cas, il faut rajouter un ingrédient supplémentaire à la théorie. Que ce soit donc en technicouleur ou dans le modèle de Higgs, on rajoute des particules dans le spectre. Ce n'est peut-être pas la seule solution mais c'est certainement la plus simple, et qui a l'avantage de pouvoir permettre facilement des calculs prédictifs afin de tester ces modèles dans des accélérateurs.

Dans la théorie technicouleur [6] on rajoute des fermions qui interagissent fortement, au point de former des états liés bosoniques extrêmement massifs que l'on appelle des techni-pions. Ces technipions interviennent entre autres dans le calcul de la self-énergie du  $W$  et du  $Z$  qui sont de masse nulle dans le lagrangien classique. Les technipions sont alors suffisamment lourds pour créer un pôle dans les propagateurs aux valeurs de  $80.2\text{ GeV}$  et  $91.17\text{ GeV}$  environ (valeurs expérimentales des masses du  $W$  et du  $Z^0$ ). Suivant le spectre de technipions que l'on considère on obtient différents modèles de technicouleur, dont certains sont très fortement contraints par les expériences actuelles au CERN. D'autres modèles que la technicouleur existent, tels que ceux qui font intervenir un secteur fortement interagissant dans la théorie, et que l'on appelle modèles BESS<sup>(1)</sup> [7, 8, 9, 10]. Notons qu'il existe des liens entre les modèles de technicouleur étendue et ces modèles BESS.

Plus simple mais plus subtil sans doute est le modèle de Higgs[11], qui date de 1964, et qui fournit une théorie élégante et pas trop complexe. Dans ce modèle on rajoute des particules scalaires dans le spectre, en nombre suffisant pour former une représentation du groupe de jauge. La particularité de ces particules scalaires regroupées dans un multiplet est que ce multiplet peut acquérir une valeur moyenne dans le vide non nulle grâce à une brisure de la symétrie. Et pour briser la symétrie de jauge, on ajoute au lagrangien un potentiel particulier (potentiel de Higgs) [12] qui rend le vide instable dans son état symétrique. L'état du vide tombe donc spontanément d'un état symétrique (par rapport au groupe de jauge) à un état non symétrique. Par ce processus, certains bosons de jauge deviennent massifs, et obtiennent un troisième mode de polarisation en "avalant" certains des champs

---

<sup>(1)</sup>BESS = Breaking the Electroweak Symmetry Strongly.

scalaires rajoutés, comme prévus par le théorème de Goldstone [13]<sup>(2)</sup>. Il reste cependant au moins une particule scalaire dont la masse est un paramètre libre de la théorie et que l'on appelle le (ou les) boson(s) de Higgs. La conjecture est donc qu'il y a eu un moment où l'univers, en se refroidissant à cause de son expansion, s'est suffisamment refroidi pour que l'instabilité due au potentiel de Higgs prenne le dessus sur l'agitation thermique et crée ainsi une transition de phase. Cette conjecture est néanmoins une question d'interprétation du modèle et je ne prétendrai pas dans cette thèse que je privilégie ce scénario. Cette thèse porte sur un certain nombre de tests que l'on peut effectuer sur ce modèle mais pour autant il est bien clair que je ne privilégie pas ce modèle par rapport à un autre et que des expériences telles que LHC<sup>(3)</sup> ou encore le projet NLC<sup>(4)</sup> permettront sans doute de discriminer parmi ces modèles<sup>(5)</sup>.

Ces masses des bosons de jauge ne sont pas seulement anecdotiques et les conséquences sur l'ensemble de la théorie sont lourdes. La contrainte la plus essentielle sans doute dans la théorie est l'unitarité de la matrice de diffusion. Cette unitarité permet d'établir des contraintes indépendantes du modèle et en particulier pour les théories perturbatives, elle implique des limites de variations sur les amplitudes de diffusion à haute énergie [15, 16]. Comme l'expliquaient Cornwall, Levin et Tiktopoulos en 1974 dans [17], les amplitudes ayant  $n$  pattes externes<sup>(6)</sup> ont un comportement en  $E^{4-n}$  dans la limite où l'énergie tend vers l'infini ( $E \rightarrow \infty$ )<sup>(7)</sup>. On savait déjà

---

<sup>(2)</sup> On appelle d'ailleurs ces champs "bosons de Goldstones".

<sup>(3)</sup> LHC = "Large Hadron Collider", projet de collisionneur proton-proton avec 14 TeV d'énergie dans le centre de masse, dont le démarrage est prévu aux alentours de 2005.

<sup>(4)</sup> NLC = "Next Linear Collider", projet de collisionneur  $e^+e^-$  à une énergie de 500 GeV jusqu'à peut-être 2 TeV.

<sup>(5)</sup> Pour me faire une fois pour toute l'avocat du diable, je tiens à rappeler que le modèle de Higgs date de la même année que le modèle des quarks de Gell-Mann [14]. A cette époque il était raisonnable encore d'introduire des scalaires dans le modèle puisque les mésons scalaires étaient encore un peu considérés comme les vecteurs de l'interaction forte. Depuis Gell-Mann, il n'y a plus dans le modèle (appelé maintenant "Standard") que des fermions pour constituer la matière, et des particules de spin 1 pour constituer les interactions. Du coup il est beaucoup moins naturel d'envisager l'existence d'une particule scalaire fondamentale. Cela étant la physique des particules a toujours été pleine de surprises...

<sup>(6)</sup> Terminolgie signifiant qu'il y a  $n$  particules impliquées dans le processus de diffusion.

<sup>(7)</sup> Ce papier montre que les contraintes sont en fait bien plus fortes et que l'unitarité impose par

depuis 1970 par Van Dam et Veltman qu’une théorie de Yang-Mills [18] massive ne tend pas vers une théorie de Yang-Mills sans masse lorsqu’on fait tendre vers 0 la masse des bosons de jauge[19]<sup>(8)</sup> (le comportement est même singulier), et ceci apparaît à partir de deux-boucles[20]<sup>(9)</sup>. A une boucle le comportement n’est pas nécessairement singulier quand  $M \rightarrow 0$ , mais de façon générale, le mode longitudinal ne se découple pas dans cette limite. Avec l’apparition du théorème d’équivalence, détaillé en 1977 par Lee, Quigg et Thacker [21], on sait aussi que l’unitarité n’est pas assurée de façon perturbative si dans un processus tel que  $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$  on n’a pas d’autre graphe que ceux obtenus par le lagrangien de Yang-Mills. La solution simple à ce problème consiste à rajouter un scalaire tel que le Higgs et la section efficace du processus précédent devient “raisonnable”<sup>(10)</sup>. Sans même parler d’unitarité<sup>(11)</sup>, John Bell avait d’ores et déjà montré en 1973 ([23]) que les simplifications entre les “mauvais termes”<sup>(12)</sup> se font de façon exacte dans les théories de jauge spontanément brisées (comme le modèle de Higgs par exemple). Ce résultat suggère qu’on ne peut pas rajouter un scalaire n’importe comment dans le modèle et que l’association de bosons de Goldstone est nécessaire. Et d’ailleurs, toujours dans l’incontournable papier de Cornwall et al. on trouve la preuve que les scalaires que l’on rajoute dans le modèle doivent être dans une représentation du groupe de jauge. C’est probablement cette cohérence du modèle de Higgs qui fait que celui-ci a autant de succès maintenant. Néanmoins des difficultés existent dans un modèle de Higgs. En effet, lorsqu’on calcule des graphes ayant une ou plusieurs boucles avec un cut-off ultraviolet, les amplitudes divergent quadratiquement avec le cut-off. Pour renormaliser la théorie il va donc falloir faire des réglages fins pour que la somme de tous les ordres de la théorie des perturbations donne un résultat fini. Ce genre de

---

exemple à la théorie d’être une théorie de jauge.

<sup>(8)</sup>La limite de masse nulle est équivalente à la limite de haute énergie ( $E/M \rightarrow \infty$ ).

<sup>(9)</sup>Ces auteurs conjecturent que la somme de tous les ordres de la théorie des perturbations admet une limite finie lorsque  $M \rightarrow 0$ . Je ne connais pas à ce jour de preuve de cette conjecture.

<sup>(10)</sup>La section efficace est décroissante avec l’énergie, mais sans les graphes incluant le Higgs, cette section efficace augmente quadratiquement avec l’énergie.

<sup>(11)</sup>Il s’agissait de considérations de renormalisabilité de la théorie([22]). Cornwall, Levin et Tiktopoulos conjecturaient aussi le lien étroit entre la renormalisabilité et l’unitarité de la matrice S de diffusion.

<sup>(12)</sup>Les termes qui augmentent trop vite avec l’énergie et qui doivent être compensés pour que l’amplitude de diffusion reste bornée dans sa limite d’unitarité.



règlages fins ne seraient pas nécessaires si ces graphes à plusieurs boucles avaient une divergence logarithmique dans ce cut-off, et la version supersymétrique du modèle de Higgs permet d'obtenir ce type de dépendance.

La question qui vient alors naturellement est de savoir où et comment trouver le boson de Higgs. Sur ce sujet, la littérature est très abondante et on peut considérer que l'essentiel a été fait. Que sait on exactement sur ce sujet? Commençons d'abord par rappeler que le modèle de Higgs n'est pas unique, et que des extensions telles que le Modèle Standard Supersymétrique Minimal, voire les extensions de ce modèle comportent plusieurs particules de Higgs. Je détaillerai plus loin les aspects techniques (lagrangiens), et me contenterai dans un premier temps des aspects qualitatifs.

En terme de spectre de particules donc, on peut distinguer 2 modèles principaux qui sont le Modèle Standard Minimal (noté **MSM** dans la suite) et qui comporte une seule particule scalaire de Higgs (neutre électriquement), et dont la masse est un paramètre libre de la théorie. La théorie de la supersymétrie (qui permet d'inclure bosons et fermions dans un même formalisme) est compatible avec la brisure de symétrie (d'isospin) réalisée par des bosons de Higgs, et donne ainsi lieu au Modèle Standard Supersymétrique Minimal (noté **MSSM** dans la suite). Ce modèle comporte deux doublets scalaires (complexes) d'isospin<sup>(13)</sup>, ce qui fait 8 degrés de liberté, dont 3 sont utilisés pour donner une masse aux  $W^\pm$  et au  $Z^0$  (comme d'ailleurs dans le **MSM**), et cette fois-ci il reste 5 bosons de Higgs ( $h$ ,  $H$ ,  $A$ ,  $H^+$ ,  $H^-$ ). Les masses de ces particules sont indéterminées mais il existe néanmoins des inégalités et des règles de sommes entre ces masses.

Dans cette thèse, différents aspects du modèle de Higgs seront abordés. En apparence très variés, il est important de noter que les différents points qui seront étudiés

---

<sup>(13)</sup>La nécessité d'avoir deux doublets dans ce cas vient des propriétés du lagrangien supersymétrique (chiral), et deux doublets sont donc nécessaires pour pouvoir générer les masses de tous les fermions (neutrinos exceptés). La nécessité de deux doublets peut se voir de façon équivalente grâce à la contrainte qui consiste à éliminer les anomalies quantiques de la théorie.

dans ce qui suit sont tous directement ou indirectement reliés au thème du modèle de Higgs et de la brisure spontanée de la symétrie de jauge. A la fin de ce chapitre, j'aurai posé les bases élémentaires du modèle et je commencerai donc le premier chapitre de physique avec une étude d'une application du modèle avec le processus  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  aux énergies du LEP. Cette application va nous permettre de montrer un moyen de tester quelques modèles appelés "au delà du Modèle Standard" qui permettraient de mieux comprendre ce fameux modèle. Pour obtenir ces résultats il nous a aussi fallu développer des méthodes de calculs, notamment des méthodes utilisant les amplitudes hélicités. En effet, un processus apparemment simple comme  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  présente déjà des difficultés calculatoires, qui se compliquent très facilement dès que l'on a affaire à plus de particules dans l'état final et des couplages plus compliqués.

Si maintenant on croit au modèle de Higgs, la première étape nécessaire pour tester ce modèle est bien entendu de trouver le boson de Higgs dans une expérience. Sur ce sujet la littérature est très abondante et par conséquent, mes recherches n'ont pas porté sur ce point. Par contre, pour comprendre le phénomène de brisure spontanée de symétrie, il faut pouvoir reconstruire dans des expériences ce potentiel instable qui est à l'origine de cette transition de phase. Ce qu'il y a de vraiment intrinsèque à ce potentiel, ce sont les self-couplages du boson de Higgs. Au minimum, la théorie prévoit des couplages entre 3 bosons de Higgs et entre 4 bosons de Higgs. Le chapitre 4 sera donc consacré à l'étude de la mesure de ces couplages. Pour cela nous avons mis en évidence des processus de diffusion qui font intervenir ces couplages, et leur étude permet de savoir si ces couplages sont mesurables et comment. Ces processus sont envisagés dans le cadre d'un collisionneur linéaire  $e^+e^-$  dont l'énergie pourrait monter jusqu'à 2 TeV, et éventuellement pourrait être converti en collisionneur à photons. Nous avons étudié des processus aussi bien dans le mode  $e^+e^-$  que dans le mode  $\gamma\gamma$  qui a montré son intérêt. Ce dernier mode présente de nouvelles difficultés technologiques pour pouvoir obtenir des faisceaux de photons très énergétiques avec un spectre peu large. Des difficultés d'ordre plus théoriques sont aussi apparues. La complexité de ces processus nous a en effet amené à chercher des techniques pour

simplifier nos calculs, et en particulier en cherchant des jauges bien adaptées à ces calculs. Il s’est avéré que la jauge que nous avons trouvée est reliée aux techniques des jauges de fond. Avant donc d’aborder la problématique de la mesure des self-couplages du Higgs, un chapitre spécial (3) sera consacré à la comparaison entre différentes techniques basées sur l’invariance de jauge (jauges de fond, technique “Pinch”, jauge de Gervais-Neveu inspirée de la théorie des cordes, factorization des couleurs).

Durant cette étude, il est apparu que les processus auxquels nous nous intéressons peuvent être assez bien reproduits par des fonctions de structure. Autrement dit, il est possible dans la limite de haute énergie de mettre en évidence une *hiérarchie* fondamentale dans les processus de diffusion considérés. Cette hiérarchie se compose d’une première désintégration des particules incidentes, dont les produits de désintégrations fusionnent lors d’une deuxième étape de diffusion. Les fonctions de structure permettent de rendre compte de la probabilité que possède la première étape de se produire. Ici les produits de désintégration initiale sont des  $W$  et nous nous sommes donc intéressé au “contenu en  $W$ ” des particules incidentes. Le cas où ces particules initiales sont des fermions (typiquement des quarks dans l’optique du collisionneur proton-proton LHC) est déjà bien étudié depuis longtemps mais le cas plus complexe du “contenu en  $W$  du photon” nous a intéressé particulièrement (car c’est celui qui intervient dans un processus que nous avons étudié). Cette partie forme donc le deuxième important volet de cette thèse, et aussi sans doute le plus ouvert. Je présenterai en effet les difficultés relatives à l’invariance de jauge qui rendent non-triviale la recherche de fonctions de structure un temps soit peu universelles. Il y sera donc exposé les questions ouvertes mais aussi quelques moyens que nous avons trouvés pour extraire les composantes invariantes de jauges dans des processus.

## 1.2 Le lagrangien de Glashow, Salam et Weinberg

Le secteur scalaire du Modèle Standard a été introduit pour créer une brisure spontanée de symétrie de façon à rendre compte de la masse des  $W$  et du  $Z^0$ . On utilise pour cela un terme de potentiel dans un champ supplémentaire qui vérifie la symétrie de jauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . La forme de ce potentiel est telle que son minimum est atteint pour un champ non nul ce qui provoque la brisure de symétrie. Rappelons brièvement ce que contient le lagrangien standard de Glashow Salam et Weinberg. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \\
& i\bar{R}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'X_\mu)R + i\bar{L}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g'X_\mu - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu\right)L \\
& - \frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu)^2 \\
& + \left(\left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g'X_\mu - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu\right)\phi\right)^2 - G_e(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^\dagger L) \\
& - \frac{m^2}{2}\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$R$  et  $L$  représentent les parties droites et gauche des leptons,  $X_\mu$  est le champ de jauge  $U(1)$  et  $\mathbf{W}_\mu$  le champ de jauge  $SU(2)$ . Ici on a pris le potentiel minimal pour la brisure de symétrie comprenant des termes quadratiques en  $\phi$  pour la masse et quartiques pour la partie proprement potentielle. Le champ  $\phi$  est un doublet scalaire d'isospin dans le cas le plus simple (voir [24], [25]). Rappelons que le fait que ce champ scalaire soit dans une représentation du groupe de jauge est imposé par l'unitarité de la théorie ([17]). Ce modèle a aussi l'avantage de s'accomoder facilement des masses des fermions, qui sont justement générées par le champ scalaire via le couplage  $G_e$ . Notons que les parties droites des fermions sont dans un singlet du groupe de jauge ce qui est contraint par l'observation expérimentale de la violation de parité en 1957 (les neutrinos sont uniquement gauches [26, 27, 28]).

Comment se produit la brisure de symétrie? Dans un premier temps il est important de remarquer que le lagrangien conserve formellement la symétrie même après la brisure spontanée de la symétrie, ce qui est une propriété courante dans les transitions de phases. C'est en effet l'état physique correspondant au vide qui va perdre la symétrie en tombant dans le puit de potentiel. Formellement donc, le lagrangien garde la symétrie mais pas la théorie. Il y a là une subtilité importante, qui est que lorsqu'il se produit la brisure de symétrie les bosons de jauge acquièrent une masse et un mode de polarisation supplémentaire. Cette polarisation supplémentaire est obtenue à partir des degrés de liberté des Goldstones, qui doivent donc disparaître (il ne sont d'ailleurs pas observés dans la nature). Cela impose une contrainte indirecte sur les bosons de jauge que l'on appelle contrainte de jauge unitaire[29]<sup>(14)</sup>. De ce fait les Goldstones ne sont pas des particules physiques, et lorsque malgré tout on calcule des amplitudes de diffusion impliquant des Goldstones (application du théorème d'équivalence [30]), celles ci peuvent dépendre des paramètres de jauge<sup>(15)</sup>. Ainsi donc, bien qu'il faille exclure les bosons de Goldstones des particules physiques, le lagrangien reste formellement invariant de jauge. Gardons toutefois à l'esprit que ce n'est qu'un modèle, et que le lagrangien présenté ci-dessus peut n'être qu'un modèle approché. Il est donc important de savoir dans l'avenir mais aussi dès à présent si d'autres types de couplages sont possibles que ceux qui viennent d'être exposés. Les variantes sont très nombreuses, surtout si l'on estime que cette théorie n'est finalement que la version "basse énergie" d'une théorie plus fondamentale à une énergie plus élevée. Etant difficile de spéculer sur ce que pourrait être cette théorie plus fondamentale, on peut toutefois compléter le lagrangien de Glashow-Weinberg-Salam (**GWS**) à l'aide de termes génériques pour des couplages qui sont encore inobservés. Ces termes peuvent avoir une constante de couplage qui possède une dimension négative en terme de masse, ce qui rend cette théorie non-renormalisable. Comme par hypothèse notre modèle n'est pas censé être valable pour des énergies

---

<sup>(14)</sup>L'expression jauge unitaire vient du fait que cette contrainte de jauge permet aux théories de jauge spontanément brisées d'exhiber les compensations nécessaires à l'unitarité de la matrice de diffusion [23].

<sup>(15)</sup>Ces amplitudes sont de toute façon *off-shell* (c'est à dire qu'une ou plusieurs pattes externes ne sont pas prises sur leur couche de masse.), ce qui leur retire leur signification physique. Notons d'ailleurs que le théorème d'équivalence n'est à ma connaissance démontré qu'en jauge  $R_\xi$ .

trop élevées cela ne sera pas incompatible avec l'étude. Mon travail au début de la thèse aura donc été pour une bonne part d'étudier les désintégrations possible du  $Z^0$  en trois photons, couplage inexistant dans le lagrangien **GWS**. Cet "exercice" m'a permis à la fois de mettre en place des techniques de calcul d'amplitudes, mais aussi de regarder des extensions possibles au Modèle Standard que l'on pourrait signer par la présence d'un couplage anormal du  $Z^0$  en trois photons.

# Chapitre 2

## Tester le Modèle Standard

### 2.1 Processus $e^+e^- \rightarrow 3$ photons

#### 2.1.1 Motivations

Le processus  $e^+e^- \rightarrow 3$  photons est un processus simple qui permet facilement de sonder une éventuelle nouvelle physique. Dans le cadre du Modèle Standard, il consiste simplement au bremsstrahlung de photons, qui se calcule assez facilement et pour lequel on peut obtenir une expression analytique de l'amplitude hélicité (bien qu'il faille tout de même un effort certain pour simplifier l'expression de l'amplitude). Ce calcul a d'ailleurs été fait analytiquement (pour les sections efficaces aussi) il y a déjà longtemps dans [31]. On peut envisager aussi que la paire électron-positron initiale s'annihile en donnant un  $Z^0$  (comme c'est souvent le cas au LEP, construit à cette fin), et ce  $Z^0$  se désintégrerait en trois photons. Cette interaction ne peut se produire que via une boucle si l'on se restreint au modèle standard minimal, et le rapport de branchement que l'on obtient est si faible (de l'ordre de  $10^{-10}$  [32]) qu'il

est en pratique inobservable au LEP. Par contre, si on recherche des interactions qui ne sont pas présentes dans le Modèle Standard, on peut décrire l'interaction  $Z^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  à l'aide d'un lagrangien effectif qui devra contenir différents termes plausibles pour décrire ce couplage. Nous verrons ainsi plus loin que 2 termes sont raisonnablement admissibles. Que peut alors cacher cette théorie effective? La première idée qui est apparue concerne une éventuelle sous-structure du  $Z^0$  [33] (par exemple constitué de monopôles). Dans ce cadre, les interactions du  $Z^0$  peuvent être traitées de façon similaire à ce qu'on appelle la *dominance des mésons vecteurs*<sup>(1)</sup>. Cette théorie a son équivalent dans le cadre de l'interaction électrofaible comme il a été montré dans [34]. Dans une étude telle que celle-ci, le champ de nouvelle physique qui peut être sondé est assez vaste, et concerne aussi (entre autre) le boson de Higgs. Celui-ci peut constituer cette fameuse sous-structure du  $Z^0$  par exemple, ou encore on peut tester un couplage non-standard du type  $Z^0\gamma H$  susceptible aussi de produire trois photons dans l'état final [35].

### 2.1.2 Amplitude QED

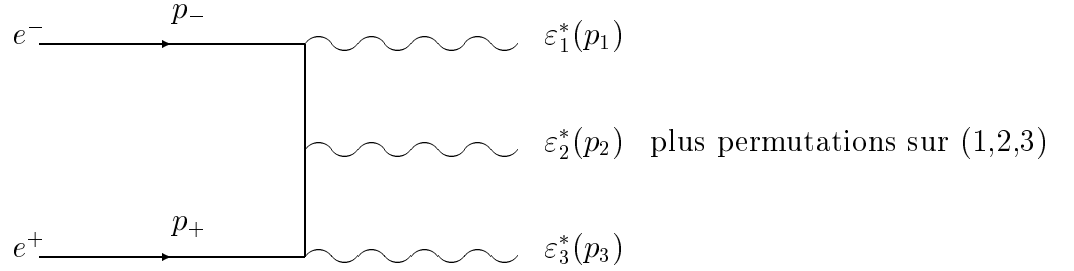
La partie QED est la partie standard de l'amplitude de diffusion. V. Lafage et moi avons employé deux méthodes distinctes pour le calcul de cette amplitude, avec deux objectifs différents. Celui de V. Lafage était d'obtenir une expression courte et facile à implémenter dans un programme informatique de type Monte-Carlo pour obtenir des résultats numériques très rapides pour les sections efficaces et les distributions. La technique que j'ai développée<sup>(2)</sup> a essentiellement pour objectif de réaliser des calculs manifestements invariants de Lorentz (en se ramenant donc à des produits scalaires et des déterminants). Ce n'est qu'à la toute fin des calculs que l'amplitude

---

<sup>(1)</sup>Apparue avec le développement de l'algèbre des courants, la *dominance des mésons vecteurs* décrit dans la théorie de l'interaction forte un couplage dominant du méson  $\rho$  (spin 1, masse  $\sim 1.5 \text{ GeV}$ ) dans les interactions profondément inélastiques.

<sup>(2)</sup>La méthode en fait existe depuis longtemps, ce dont je ne me suis rendu compte qu'a posteriori. Elle s'inspire de la formule de Bouchiat et Michel[36], mais la forme que je lui ai donnée est toutefois légèrement différente.



**Fig. 2.1:** *Amplitude QED*

a été exprimée en termes de coordonnées en tâchant de conserver au maximum les symétries de l'expression. Le détail de la méthode de calcul est en annexe A (page 169) pour ne pas surcharger ce chapitre. L'amplitude du processus  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  est composé du graphe 2.1 (auquel il faut rajouter les graphes symétriques de celui-ci par permutation des photons).

Le principe du calcul est d'écrire :

$$\mathcal{M}_{in} = \bar{v}(p_+, h_+) \mathcal{O} u(p_-, h_-) = \text{tr}[u(p_-, h_-) \bar{v}(p_+, h_+) \mathcal{O}] \quad (2.1)$$

Pour ce processus, l'opérateur  $\mathcal{O}$  vaut :

$$\mathcal{O} = \frac{ie^3}{4} \frac{\not{\epsilon}_3^* (\not{p}_+ - \not{p}_3) \not{\epsilon}_2^* (\not{p}_- - \not{p}_1) \not{\epsilon}_1^*}{(p_+ p_3)(p_- p_1)} + \text{permutations sur } (1, 2, 3) \quad (2.2)$$

Pour calculer l'amplitude avec notre formule, nous avons utilisé un paramétrage particulier pour  $\not{\epsilon}_i$  donnée par le groupe CALKUL (voir [37]) :

$$\not{\epsilon}_\lambda(k) = \frac{1}{4\sqrt{(p_+ p_-)(p_+ k)(p_- k)}} [\not{k} \not{p}_+ \not{p}_- (1 + \lambda \gamma^5) - \not{p}_+ \not{p}_- \not{k} (1 - \lambda \gamma^5)] \quad (2.3)$$

Ce qui vient de :

$$\varepsilon^\nu = \frac{1}{2\sqrt{(p_+p_-)(p_+k)(p_-k)}} [(p_+p_-)k^\mu + (p_+k)p_-^\nu - (p_-k)p_+^\nu + i\lambda\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} k_\mu p_{+\rho} p_{-\sigma}] \quad (2.4)$$

Remarquons que le terme en  $k^\mu$  peut être éliminé grâce à l'invariance de jauge. Celle-ci impose en effet que le tenseur sur lequel est contracté la polarisation soit transverse en  $k$  (cas simple d'identité de Ward-Takahashi, voir l'annexe C page 203). Si on calcule l'amplitude en utilisant des coordonnées sphériques pour les vecteurs, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{qed} = & N[e^{i\varepsilon\varphi_1} \{-8x_1^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \delta_2 \delta_3 + \\ & 2\varepsilon x_1 \sin(\theta_1) (2(\delta_3 - \delta_2)(1 + 2x_2 x_3 (\cos(\theta_2) \cos(\theta_3) - 1)) - 2x_1 \lambda_1 \delta_1^2) \} \\ & + e^{i\varepsilon\varphi_2} \{-8x_2^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \delta_1 \delta_3 + \\ & 2\varepsilon x_2 \sin(\theta_2) (2(\delta_1 - \delta_3)(1 + 2x_1 x_3 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_3) - 1)) - 2x_2 \lambda_2 \delta_2^2) \} \\ & + e^{i\varepsilon\varphi_3} \{-8x_3^2 \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) \delta_1 \delta_2 + \\ & 2\varepsilon x_3 \sin(\theta_3) (2(\delta_2 - \delta_1)(1 + 2x_1 x_2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - 1)) - 2x_3 \lambda_3 \delta_3^2) \} \\ & + 8ix_1 x_2 x_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \{ \\ & e^{i\varepsilon\varphi_1} \delta_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + e^{i\varepsilon\varphi_2} \delta_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + e^{i\varepsilon\varphi_3} \delta_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \}] \quad (2.5) \end{aligned}$$

et

$$N = \frac{i(\pi\alpha)^{3/2}}{x_1 x_2 x_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)}$$

où  $x_i$  est la fraction de  $\sqrt{s}$  qui est emportée par le  $i^e$  photon,  $\lambda_i$  son hélicité,  $\delta_1 = \lambda_2 - \lambda_3$ ,  $\delta_2 = \lambda_3 - \lambda_1$ ,  $\delta_3 = \lambda_1 - \lambda_2$ ,  $\theta_i$ ,  $\varphi_i$  sont les angles sphériques standards ( $\theta$  = angle par rapport au faisceau,  $\varphi$  = angle en projection dans le plan perpendiculaire

au faisceau) et enfin  $\varepsilon = \pm 1$  est la polarisation de l'électron. On voit que l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{M}_{qed} = \mathcal{M}_{23} + \mathcal{M}_{31} + \mathcal{M}_{12} + \mathcal{M}'_{123} \quad (2.6)$$

(les indices sont ceux des photons, le dernier terme étant symétrique par permutation des photons).

Un autre paramétrage possible pour les directions des photons est intéressante pour certains calculs :

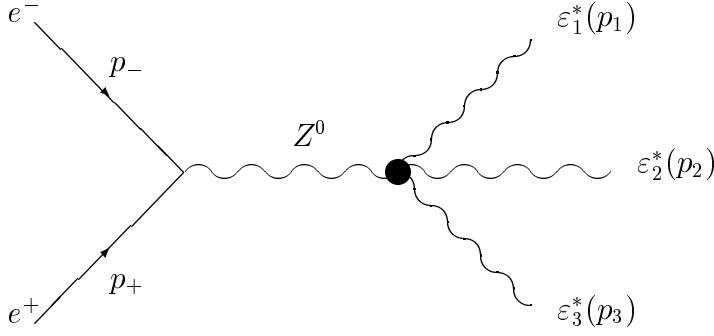
$$\vec{n}_i = \begin{cases} \cos(\alpha_i) \cos(\Theta) \cos(\Phi) - \sin(\alpha_i) \sin(\Phi) \\ \cos(\alpha_i) \cos(\Theta) \sin(\Phi) + \sin(\alpha_i) \cos(\Phi) \\ - \cos(\alpha_i) \sin(\Theta) \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $\Theta, \Phi$  sont les angles sphériques de la normale au plan des photons et  $\alpha_i$  trois angles définissant leur direction dans ce plan. Avec ce paramétrage, la section efficace différentielle vaut :

$$d\sigma = \frac{1}{3 \cdot 2^{10} \cdot \pi^5} |\mathcal{M}|^2 x_1 x_2 x_3 \sin(\Theta) d\Theta d\Phi d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (2.8)$$

en admettant que  $x_i$  puisse être négatif car dans ce cas, les 3 directions peuvent être dans le même demi-plan. Plus précisément, on a :

$$x_1 = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \quad (\text{cycl.})$$

**Fig. 2.2:** *Amplitude anormale*

### 2.1.3 Lagrangien effectif $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

Nous avons aussi regardé ce que donnerait l'introduction d'une interaction plus compliquée faisant intervenir un lagrangien effectif électrofaible et qui permettrait la production de trois photons dans l'état final via un  $Z^0$ , comme on a représenté sur le graphe 2.2.

Par conservation du spin, le  $Z^0$  est transverse dans ce processus et on peut l'assimiler à un photon pour le calcul du vertex, qui n'est autre que le vertex de diffusion  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  (à un facteur 4 de symétrie près). Cette désintégration du  $Z^0$  est rendue possible par exemple si le  $Z^0$  a une sous-structure incluant des particules chargées électriquement [33], ou composée de monopôles [38]. Le lagrangien effectif considéré est donc :

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{M_Z^4} \left( \beta_1 (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) (F_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}) + \beta_2 (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) (F_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu}) \right) \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{M_Z^4} \left( (\beta_1 - 2\beta_2) (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) (F_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}) + 4\beta_2 F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_{\rho\sigma} Z^{\sigma\mu} \right) \quad (2.10)$$

C'est l'expression la plus générale que l'on peut obtenir et il est remarquable

que le lagrangien effectif à quatre photons s'écrit de façon simple en fonction des tenseurs self-dual  $F_+^{\mu\nu}$  et anti-self dual  $F_-^{\mu\nu}$  définis par :

$$F_{\pm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F^{\mu\nu} \pm i\tilde{F}^{\mu\nu}) \quad (2.11)$$

en posant  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$  et  $\beta_{\pm} = \beta_1 \pm \beta_2$ , ce qui donne pour le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{M_Z^4} \left( 2\beta_+ F_+^2 F_-^2 + \beta_- \left( (F_+^2)^2 + (F_-^2)^2 \right) \right) \quad (2.12)$$

Comme cette re-écriture le suggère, on a pu constater que ces deux coefficients  $\beta_+$  et  $\beta_-$  contribuent à des amplitudes hélicités distinctes, et par exemple, seul le coefficient  $\beta_-$  apportera une contribution au cas où les trois photons ont la même hélicité.

Maintenant cherchons l'expression du vertex à partir de la première expression du lagrangien. Le terme  $(FF)(FZ)$  donne :

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})(F_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}) \rightarrow & \\ & 8i[p_{1\alpha_2}p_{2\alpha_1}p_{3\alpha_4}p_{4\alpha_3} + p_{1\alpha_3}p_{2\alpha_4}p_{3\alpha_1}p_{4\alpha_2} + p_{1\alpha_4}p_{2\alpha_3}p_{3\alpha_2}p_{4\alpha_1} \\ & (p_1p_2)(p_3p_4)g_{\alpha_1\alpha_2}g_{\alpha_3\alpha_4} + (p_1p_3)(p_2p_4)g_{\alpha_1\alpha_3}g_{\alpha_2\alpha_4} + (p_1p_4)(p_2p_3)g_{\alpha_1\alpha_4}g_{\alpha_2\alpha_3} \\ & - (p_1p_2)g_{\alpha_1\alpha_2}p_{3\alpha_4}p_{4\alpha_3} - (p_1p_3)g_{\alpha_1\alpha_3}p_{2\alpha_4}p_{4\alpha_2} - (p_1p_4)g_{\alpha_1\alpha_4}p_{2\alpha_3}p_{3\alpha_2} \\ & - (p_2p_3)g_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_4}p_{4\alpha_1} - (p_2p_4)g_{\alpha_2\alpha_4}p_{1\alpha_3}p_{3\alpha_1} - (p_3p_4)g_{\alpha_3\alpha_4}p_{1\alpha_2}p_{2\alpha_1}] \end{aligned} \quad (2.13)$$

où l'indice 4 représente l'indice de l'impulsion et du vecteur polarisation du  $Z^0$ .

Le second terme donne un vertex plutôt compliqué et ne sera pas écrit explicitement ici, mais ses 48 termes sont similaires à ceux de l'expression précédente. Nous écrirons le vertex  $V^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  où  $V$  est symétrisé sur les 4 indices et les 4 impulsions. L'opérateur correspondant au processus "électrofaible" vaut :

$$\mathcal{O} = \frac{gs^2}{2M_Z^4 \cos(\theta_w)(s - M_Z^2 + i\epsilon_Z M_Z)} \gamma^\alpha (g_v - g_a \gamma^5) (-g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{M_Z^2}) V^\beta(k) \quad (2.14)$$

avec  $V^\beta(k) = V^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta}(p_1, p_2, p_3, k) \varepsilon_{1\alpha_1}^* \varepsilon_{2\alpha_2}^* \varepsilon_{3\alpha_3}^*$ , et utilisant notre formule, l'amplitude s'écrit pour  $J_z = \pm 1$  :

$$\mathcal{M}_{e-w} = \frac{g(g_v - g_a \varepsilon) \sqrt{s}}{4 \cos(\theta_w)(s - M_Z^2 + i\epsilon_Z M_Z)} \left( \frac{\sqrt{s}}{M_Z} \right)^4 \tilde{B} \cdot \tilde{V} \quad (2.15)$$

et pour  $J_z = 0$ ,  $\mathcal{M}_{e-w} = 0$ .  $\tilde{V}$  est ici uniquement fonction des impulsions réduites,  $\tilde{B}$  est défini en annexe A page 176,  $g$  est la constante de couplage faible,  $M_Z$  la masse du  $Z^0$ ,  $\epsilon_Z$  la largeur du  $Z^0$ ,  $\theta_w$  l'angle de Weinberg,  $g_v$  et  $g_a$  les facteurs de couplage vectoriels et axiaux, qui valent dans notre cas respectivement  $2 \sin^2(\theta_w) - 1/2$  et  $-1/2$ .

### 2.1.4 Analyse par Monte Carlo

En faisant plus de travail formel sur l'expression de l'amplitude totale, on aurait pu arriver à une expression analytique pour la section efficace différentielle. Cela aurait pris du temps et il est en fait plus rentable de passer au calcul numérique assez rapidement. En fabriquant un programme de calcul de type Monte Carlo, on se rapproche plus du côté expérimental. De plus, les expérimentateurs ont souvent besoin de réaliser des coupures très compliquées sur l'espace des phases et des calculs

**Tableau I:** Coefficients de  $\sigma$  obtenus pour  $\sqrt{s} = M_Z = 91.17 \text{ GeV}$ , avec  $x_i > 0.05$ ,  $\cos(\theta_i) < 0.9$ , et le cosinus entre 2 photons inférieur à 0.93.

Terme	$\sigma_+$	$\sigma_-$
QED ( $\sigma_0$ )	0.6961 pb	0.6961 pb
$\alpha_{\pm}$	1.10	-1.26
$\lambda_{\pm}$	1.925	2.515
$\mu_{\pm}$	9.131	12.09

analytiques seraient alors inextricables. Nous avons pu ainsi fournir un programme à des expérimentateurs de l'expérience L3 du LEP qui peuvent l'adapter à leur guise.

Mais revenons à l'amplitude. La première chose importante à remarquer, c'est la présence d'un facteur  $g_v - g_a \varepsilon$ , ( $\varepsilon = \pm 1$ ) qui induit une section efficace différente avec un faisceau polarisé suivant que l'électron est droit ou gauche ( $g_v$  est petit mais non nul). C'est un bon moyen de s'assurer qu'une possible déviation par rapport au processus QED seul (à l'ordre de l'arbre) n'est pas due à des corrections radiatives qui donneraient les mêmes contributions aux sections efficaces quel que soit le signe de  $\varepsilon$ . Plus précisément, si on calcule  $\sigma_{e_R^- e^+} = \sigma_+$  et  $\sigma_{e_L^- e^+} = \sigma_-$  à l'aide un programme Monte Carlo, on obtient :

$$\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_0}{\eta^2} - \frac{\alpha_{\pm} \eta^4 \xi}{1 + \xi^2} (\beta_1 + \beta_2) - 2 \frac{\beta_1 \beta_2 \eta^{10} \lambda_{\pm}}{1 + \xi^2} + \frac{\mu_{\pm} \eta^{10}}{1 + \xi^2} (\beta_1^2 + \beta_2^2) \quad (2.16)$$

où  $\sigma_0$  est la section efficace QED seule calculée au pic du  $Z^0$ ,  $\eta = \sqrt{s}/M_Z$ ,  $\xi = M_Z(\eta^2 - 1)/\sqrt{s}$ , et le reste est constitué de coefficients dont les valeurs, obtenues grâce au Monte-Carlo, sont résumées dans la table I.

On peut remarquer sur les coefficients de la forme quadratique que leur rapport entre la valeur correspondant à  $\sigma_-$  et la valeur correspondant à  $\sigma_+$  sont identiques

et égaux à  $\kappa = \left(\frac{q_v + q_a}{g_v - g_a}\right)^2 = 1.323$ , à cause de la violation de parité du  $Z^0$ . De plus, au pic du  $Z^0$ , l'amplitude QED est réelle tandis que l'amplitude  $Z^0 \rightarrow 3 \gamma$  est imaginaire pure de sorte que le terme d'interférence est nul. Cela a une conséquence importante qui est que, si un effet non standard devait être trouvé expérimentalement, il serait impossible de distinguer les contributions de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sur la section efficace (même polarisée) si on reste au pic du  $Z^0$ . Il faudrait pour cela regarder certaines distributions et même dans ce cas, l'analyse ne serait pas facile. Néanmoins, si on recherche cet effet pour  $\sqrt{s} > M_Z$  et à cause des signes opposés pour  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  dans les termes d'interférences, cela devient possible de mesurer les contributions de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Plus précisément, si on fait la rotation suivante :

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_2 + \beta_1) \\ \beta'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_2 - \beta_1)\end{aligned}$$

Alors si on pose  $\delta_{\pm} = \sigma_{\pm} - \sigma_0/\eta^2$  on a :

$$\beta'_1 = \frac{1 + \xi^2}{2\sqrt{2}\eta^4\alpha_+\xi} \left( \frac{\delta_-}{\kappa} - \delta_+ \right) \quad (2.17)$$

$$\beta'_2 = \frac{\pm 1}{\eta^3\sqrt{\mu_+ + \lambda_+}} \left[ \frac{1 + \xi^2}{\eta^4}\delta_+ + \sqrt{2}\beta'_1\alpha_+\xi - \beta_1'^2\eta^6(\mu_+ - \lambda_+) \right]^{1/2} \quad (2.18)$$

L'expression de  $\beta'_1$  nous montre que la meilleure valeur "théorique" de  $\sqrt{s}$  pour mesurer les couplages est environ  $M_Z(1 + 0.0143) = 92.47 \text{ GeV}$ , ce qui est la valeur minimale de  $(1 + \xi^2)/\eta^4\xi$ . La valeur maximale est obtenue pour  $\sqrt{s} = 128.9 \text{ GeV}$ , mais à cette énergie, la partie électrofaible contribue de façon quasiment nulle. Par conséquent, on a à 92.47 GeV :

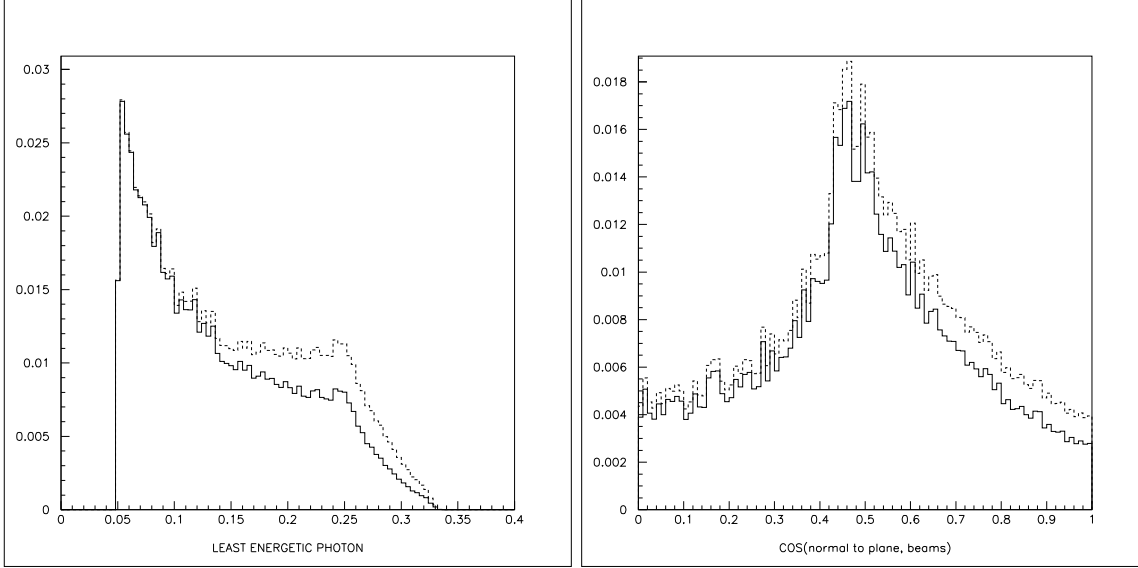


$$\beta'_1 = 0.6691 \left( \frac{\delta_-}{1.323} - \delta_+ \right) \quad (2.19)$$

Néanmoins, il est clair que ce n'est pas réaliste expérimentalement puisqu'il faut beaucoup de statistique pour reconstruire les sections efficaces alors que le nombre de possibles événements "électrofaibles" décroît rapidement au delà du pic du  $Z^0$ . La luminosité intégrée au LEP est telle que le nombre d'événements à 3 photons ne dépasse pas les 150 par expérience, et les événements "électrofaibles" sont vraisemblablement très peu nombreux s'il y en a, et ce même au pic du  $Z^0$ ! Par contre, si on monte beaucoup en énergie, la contribution électrofaible devient prédominante et on a de l'ordre de 1 pb pour 500 GeV dans le centre de masse. Cela étant, on risque d'arriver rapidement au domaine non perturbatif du modèle, car on sait qu'un tel lagrangien effectif viole l'unitarité.

On peut tout de même raisonnablement espérer pouvoir mesurer un effet non standard sur le pic du  $Z^0$ , même avec très peu de statistique en regardant deux paramètres intéressants. Le premier est la distribution d'énergie du photon le moins énergétique et le second la distribution du cosinus entre le faisceau et la normale au plan des photons. Ces densités sont représentées sur les figures 2.3 sur lesquelles la ligne continue représente la contribution de la QED seule, et la courbe pointillée représente la contribution QED et la contribution électrofaible pour laquelle les constantes de couplages sont prises arbitrairement à 0.08 (ce qui représente environ 15% de contribution électrofaible à la section efficace totale).

Pour ces courbes, les coupures effectuées sont celles écrites au bas de la table de coefficients vue ci-dessus I. Sur le premier histogramme, on peut constater que les courbes peuvent être approximativement modélisées par 3 segments de droite. La contribution électrofaible a pour effet de modifier la pente relative de ces segments, ce qui pourrait permettre de mesurer cette contribution (voir aussi [39]).

**Fig. 2.3:** *Distributions pour  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$* 

Sur le second histogramme, on se rend compte que “magiquement”, avec les coupures particulières que nous avons choisies, la courbe correspondant à la contribution QED seule est approximativement symétrique autour de 0.5. Par conséquent, une asymétrie de la courbe expérimentale seraient due nécessairement à un effet non QED. Numériquement, avec 73 événements (après coupure, partant de 100 événements générés), le seuil de mesure en n'utilisant que cette courbe est environ 10% pour la contribution électrofaible à la section efficace totale. C'est encore beaucoup trop pour mesurer un tel effet qui est vraisemblablement très faible, mais avec plus de statistiques et en regardant plusieurs paramètres simultanément, on peut espérer au moins mettre des limites sur les constantes de couplage, et c'est d'ailleurs ce qu'ont regardé des expérimentateurs de l'expérience L3 du LEP, utilisant le Monte Carlo que nous avons écrit. Si l'effet non standard est mesurable, on peut raisonnablement espérer pouvoir différencier les deux constantes de couplages. Cette analyse est un peu sophistiquée car en fait les contributions des deux constantes de couplages apparaissent souvent quasi-identiques sur de nombreuses distributions. La distribution mono-dimensionnelle la plus sensible dans ces deux

couplages est d'ailleurs celle du cosinus de l'angle de la normale au plan des photons dont nous venons de parler. On gagne nettement en sensibilité dès que l'on trace la distribution bi-dimensionnelle entre l'énergie du photon le moins énergétique et celle du photon d'énergie intermédiaire. D'un point de vue expérimental on a moins d'événements par case dans une distribution à deux dimensions que dans une distribution à une 1 dimension ce qui tempère le gain en précision de ces mesures. Le lecteur intéressé pourra trouver cette analyse complète et détaillée dans l'article que nous avons publié à ce sujet [40].

### 2.1.5 Conclusion de cette étude

Cet “exercice” m'aura donc permis de me familiariser avec le Modèle Standard et ses extensions possibles, ainsi qu'avec la technique des amplitudes hélicités qui permet de sonder plus précisément la physique sous jacente à un processus. Ici, les calculs auront été poussés assez loin car le processus  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  est assez simple et symétrique. D'où l'emploi des coordonnées sphériques pour les calculs, coordonnées qui sont assez naturelles aux expérimentateurs. Notons qu'avec des simplifications judicieuses, l'expression de l'amplitude QED est passée de environ 2000 termes (voire 10000 avec de mauvais paramétrages) à une trentaine, comme on a pu le constater quelques pages auparavant (eq. (2.5)). Cela étant, pour des processus plus compliqués et comme on le verra dans la suite, les amplitudes sont écrites en fonction des produits scalaires des quadrivecteurs, et les vecteurs polarisation sont calculés numériquement plutôt qu'exprimés en fonction des impulsions présentes dans le processus (avec une formule du type (2.4)). En effet, pour des processus compliqués, on ne sait pas simplifier énormément les expressions, et donc le travail consiste simplement à essayer de limiter le temps de calcul numérique des sections efficaces et autres distributions en essayant d'optimiser les programmes informatiques dans lesquels on calcule l'amplitude. Il existe toutefois des techniques de simplifications que nous montrerons dans la suite, utilisant un choix de jauge spécifique. A l'exception

de ces méthodes, les recherches récentes en calcul formel ne permettent pas de miracles. Par exemple, la technique assez récente des polynômes de Gröbner[41] permet de simplifier un peu des expressions polynômiales comportant un grand nombre de variables. Cela dit, l'application à l'amplitude précédente permet des simplifications de l'ordre de 20% sur le nombre de termes, mais malheureusement l'algorithme est tel qu'on perd la symétrie entre les variables cinématiques des trois photons<sup>(3)</sup>.

La partie Physique de cette étude est intéressante parce qu'elle permet de tester des extensions du Modèle Standard et qu'en plus, cette étude est très actuelle. Nos résultats [40] ont ainsi pu être utilisés par des expérimentateurs sur l'accélérateur LEP, qui ont ainsi pu mettre des limites sur les couplages anormaux du  $Z^0$  avec trois photons [42, 43]. Jusqu'ici, les limites établies sont parfaitement compatibles avec le Modèle Standard. Il s'agit donc d'une désintégration qui est simple mais qui malgré tout peut apporter des informations sur la validité du Modèle Standard. Néanmoins, si on découvre à l'aide du processus  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  une déviation par rapport au Modèle Standard, l'analyse de son origine s'avère délicate et requiert des mesures précises des deux couplages effectifs. En effet, suivant les modèles de Nouvelle Physique que l'on considère, on a des prédictions distinctes pour les valeurs relatives des deux couplages effectifs. En pratique, la statistique accumulée sur les expériences du LEP ne laissent pas encore envisager de telles mesures de précision qui permettraient de discriminer entre différentes extensions possibles au Modèle Standard. C'est entre autres pour cette raison que des mesures plus directes seront nécessaires dans l'avenir pour compléter la vérification du Modèle Standard. C'est dans cet esprit que va se situer la suite de cette thèse dans laquelle je vais rapporter nos tests directs du secteur scalaire de la théorie électrofaible par la mesure des couplages entre plusieurs bosons de Higgs. Ces tests reposent sur l'étude de processus complexes, pour lesquels il n'y a jamais trop d'astuces pour diminuer l'ampleur des calculs. Comme je l'ai rappelé au début de ce chapitre, il est important de disposer

---

<sup>(3)</sup>De plus il s'agit d'un algorithme assez lent, et les spécialistes du calcul formel n'ont pas encore convaincu la communauté de physique des particules, c'est dire à quel point des solutions pointues en algorithmique sont encore à trouver pour nos besoins.

d'algorithmes de calcul qui nous simplifient la vie. Mais on sait aussi depuis longtemps qu'en utilisant les potentialités de la théorie des champs, on peut obtenir des simplifications de calculs que l'on n'aurait probablement jamais trouvé autrement. C'est de ce genre de potentialité dont je vais parler dans le prochain chapitre qui traite de différentes jagues qui apportent des simplifications conséquentes aux graphes de Feynman.



## Chapitre 3

# Comparaison entre différentes façons de “fixer” la jauge

Comme nous l’avons vu au chapitre précédent, la complexité d’une amplitude de diffusion augmente très rapidement avec le nombre de particules externes et tout est bon pour simplifier au maximum les expressions que l’on obtient. Ici nous allons décrire différentes méthodes, essentiellement de fixation de jauge, qui permettent souvent de se ramener à des expressions compactes, ou au moins qui diminuent la complexité des amplitudes. Je commencerais par les plus standards, les jauges  $R_\xi$  et les jauges non-linéaires, ainsi qu’une version de jauge non-linéaire que nous avons développée et qui nous a été très utile pour certains calculs de processus que nous verrons au chapitre 4. Je parlerai ensuite des jauges de fond car la jauge non-linéaire que nous avons contruite est assez semblable par sa forme à une jauge de fond. Ces jauges ont l’avantage de préserver l’invariance de jauge par rapport à un champ (champ de fond), et dans ce même esprit s’est développée ces dernières années une technique (technique “pinch”), dont l’objectif est de créer de nouvelles fonctions de corrélations qui ne dépendent pas de  $\xi$  si on calcule en jauge  $R_\xi$ . Cette méthode donne des résultats semblables à ceux des jauges de fond. Je mentionnerai enfin

une technique inspirée de la théorie des cordes [44, 45]. Si la théorie des cordes semble très éloignée de ce que nous faisons, certaines de leurs propriétés simplifient énormément les calculs d’amplitude (dans une limite appelée limite de “tension infinie”). Cette théorie peut se ramener à l’utilisation d’une jauge spéciale appelée jauge de Gervais-Neveu, qui semble intéressante mais que je ne manie pas encore assez bien pour pouvoir l’utiliser en pratique.

### 3.1 Jauges non-linéaires et jauge de ’t Hooft-Feynman

Lorsque les théories de jauge spontanément brisées sont apparues, il a fallu prouver la renormalisabilité de la théorie, ce que ’t Hooft a montré dans [46] en utilisant notamment des identités de Ward (voir annexe C page 203). Pour obtenir ce résultat, ’t Hooft a utilisé une jauge particulière [22] qui lui simplifiait considérablement ses calculs. Cette jauge a ensuite été généralisée en introduisant un paramètre  $\xi$  [47] ce qui donne le lagrangien de fixation de jauge suivant :

$$\mathcal{L}_{gauge-fixing} = -\frac{1}{\xi} |\partial_\mu W^{+\mu} + i\xi M_W \varphi^+|^2 \quad (3.1)$$

Le terme en Goldstone permet ainsi d’éliminer le couplage entre un boson de Goldstone seul et un  $W$  ce qui aboutirait à des difficultés dans la recherche du propagateur du  $W$ . Ce type de jauge a eu un succès encore inégalé, grâce à sa simplicité et son efficacité. Comme on le verra dans des applications, utiliser ce type de jauge implique plus de graphes de Feynman qu’en jauge unitaire à cause de l’apparition des bosons de Goldstone, mais on est malgré tout gagnant car les graphes sont nettement plus simples à calculer. En effet, en jauge unitaire les propagateurs des bosons de jauge contiennent un terme proportionnel à  $k^\mu k^\nu / M_V^2$  ( $k^\mu$  = impulsion du boson), qui est éliminé en jauge  $R_\xi$  (en prenant  $\xi = 1$ ). On simplifie donc les



graphes et de plus, les termes que l'on a éliminés étaient la source d'instabilités numériques, dues à de subtiles compensations entre ces termes qui augmentent rapidement avec l'énergie et "brouillent" les autres termes plus physiques. On peut encore sophistiquer ces jauges en les rendant non-linéaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gf} = & -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\eta}(\partial_\mu Z^\mu + \eta M_Z \chi)^2 \\ & -\frac{1}{\xi}|(\partial_\mu + igW_\mu^3)W^{+\mu} + i\xi M_W \varphi^+|^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Grâce à ce type de jauge étudié en détails dans [48] (voir aussi [49]), on peut éliminer certains vertex tel que  $\gamma W^+ \phi^-$ . Ce vertex couple un photon à des particules chargées de natures différentes ce qui n'est pas très naturel, et explique qu'on puisse l'éliminer en fixant convenablement la jauge. Dans ce type de jauge on remplace la dérivée partielle par une dérivée covariante par rapport à  $W^3$ , et cette méthode permet de faire des calculs qui sont manifestement invariants de jauge par rapport à cette composante. Pour aller plus loin, nous avons cherché (dans le contexte d'un processus particulier) à éliminer le vertex  $\gamma W^+ \phi^- H$  (qui est aussi peu "naturel" que le précédent) et pour cela on peut rajouter encore un terme dans le lagrangien de "fixation" de jauge en écrivant (voir aussi l'annexe B) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gf} = & -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\eta}(\partial_\mu Z^\mu + \eta M_Z \chi)^2 \\ & -\frac{1}{\xi}|(\partial_\mu + igW_\mu^3)W^{+\mu} + i\xi M_W \varphi^+ + i\frac{g}{2}H \varphi^+|^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nous avons spécialisé cette formule en prenant pour fixer la jauge (par exemple dans les calculs du chapitre 4) :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{2\xi_\gamma}(\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{2\xi_\gamma}(G^A)^2 \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_Z = -\frac{1}{2\xi_Z}(\partial_\mu Z^\mu + \xi_Z \frac{g_Z}{2}(v + \tilde{\varepsilon}H)\varphi_3)^2 = -\frac{1}{2\xi_Z}(G^Z)^2 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & -\frac{1}{\xi_W}|\partial_\mu W^{+\mu} + ie\tilde{\alpha}(A \cdot W^+) + i\tilde{\beta}gc_W(Z \cdot W^+) \\ & + i\xi_W \frac{g}{2}(v + \tilde{\delta}H - i\tilde{\kappa}\varphi_3)\varphi^+|^2 = -\frac{1}{\xi_W}(G^+G^-) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Avec ce paramétrage on peut, suivant les valeurs de  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  éliminer le vertex  $\gamma W^+ \varphi^-$  en même temps que  $ZW^+ \varphi^-$ . Si on fait une analyse détaillée de cette nouvelle jauge, on se rend compte qu'elle est très similaire à une jauge de fond, comme nous le verrons dans la suite (voir [50]). Le principe des jauges de fond consiste à séparer les champs de jauge en une partie classique (dite de fond) et une partie quantique. On conserve alors une invariance de jauge explicite sur la partie classique des champs de jauge bien que l'on fixe la jauge du champ quantique. Ici les champs neutres jouent le "rôle" du champ classique. Le champ de jauge quantique n'apparaît que dans les boucles et ne nous concernera pas dans les calculs que nous avons effectués. Ce qui ne veut pas dire bien entendu que dans le cas d'une jauge non-linéaire (comme celle que nous avons utilisée eq. (3.4)) certains champs ne peuvent pas apparaître sur les pattes externes. Nous ne sommes pas dans le cadre exact d'une jauge de fond. Toutefois, on a ici une application pratique des simplifications qu'apportent la technique des jauges de ce type pour des processus à l'arbre, ce qui est une nouveauté. On remarque en particulier certaines propriétés intéressantes sur les expressions des vertex tel que  $\gamma_\mu W_\alpha^+ W_\beta^-$  qui s'écrit :

$$-ie \left[ g_{\alpha\beta}(p_- - p_+)_\mu + \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}}{\xi_W}\right) (k_\alpha g_{\mu\beta} - k_\beta g_{\mu\alpha}) + \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{\xi_W}\right) (g_{\mu\alpha} p_{+\beta} - g_{\mu\beta} p_{-\alpha}) \right] \quad (3.7)$$

Dans la première parenthèse on peut reconnaître le vertex de QED scalaire  $\gamma s^+ s^-$

et la deuxième parenthèse représente un courant de spin 1 (la troisième est éliminée pour  $\tilde{\alpha} = \xi_W = 1$ ), dont le coefficient multiplicatif correspond exactement au moment magnétique  $g = 2$ . Notons qu'on peut obtenir le même genre de décomposition en QED dans le vertex  $\gamma f \bar{f}$ , avec une partie QED scalaire (convection de charge) et une partie correspondant au courant de spin (voir lagrangiens quadratiques en annexe A). Sur l'expression (3.7) on remarque que  $\tilde{\alpha} = \xi_W = 1$  apporte d'intéressantes simplifications et on trouve de façon récurrente dans ce type de jauge les simplifications les plus importantes quand  $\xi_W = 1$ . Cette valeur est apparemment privilégiée et l'origine de ce phénomène reste encore assez mystérieuse pour moi.

### 3.1.1 Le théorème d'équivalence

Le théorème d'équivalence est une application très intéressante des jauges  $R_\xi$  car elle permet de faire de bonnes approximations en simplifiant de façon considérable les calculs. Ce théorème repose sur une identité de Ward (ces identités sont détaillées dans l'annexe C). Lorsqu'on s'intéresse aux identités de Ward dans la jauge  $R_\xi^{(1)}$ , on se rend compte que certaines d'entre elles peuvent s'exprimer de façon simple, comme représenté sur le schéma suivant :

---

<sup>(1)</sup>  $\mathcal{L}_{gauge-fixing} = -\frac{1}{\xi} |\partial_\mu W^{+\mu} + i\xi M_W \varphi^+|^2$

The diagram shows an equality between two Feynman diagrams. On the left, a central black vertex is connected to eight external lines (four horizontal, four diagonal). A wavy line representing a vector boson with momentum  $p^\mu$  and polarization index  $\mu$  (in a circle) enters from the top-left. On the right, the same vertex and external lines are shown, but a dashed line representing a Goldstone boson with momentum  $\Phi$  enters from the top-left. Between the two diagrams is the expression  $= i\xi m_V \times$ .

Exprimé avec des mots, lorsqu'on remplace dans une amplitude la polarisation d'un  $W$  ou d'un  $Z$  par son impulsion, on obtient la même amplitude à ceci près qu'on a remplacé le boson vecteur en question par le boson de Goldstone associé <sup>(2)</sup>. Or dans la limite de grande énergie, la polarisation longitudinale d'un boson  $W$  ou  $Z$  est de plus en plus proche de son impulsion :

$$\varepsilon_L^\mu(k) = \frac{k^\mu}{M_V} + O\left(\frac{M_V}{E_V}\right) \quad (3.8)$$

où  $E_V$  est l'énergie du boson de jauge de masse  $M_V$ . Le théorème d'équivalence [21, 30] est une généralisation de cette remarque, et stipule que si dans une amplitude de diffusion des bosons de jauge longitudinaux interviennent et que ceux-ci ont une énergie très grande par comparaison à leur masse, alors cette amplitude est bien approximée par une amplitude (plus simple à calculer) dans laquelle les bosons de

---

<sup>(2)</sup>Notons que l'amplitude obtenue n'est pas physique car off-shell. En effet, dans la jauge  $R_\xi$ , les bosons scalaires de Goldstones acquièrent artificiellement une "masse" ( $M_\phi = \xi M_V$ ) *a priori* différente de  $M_V$  ( $V = W, Z$ ) mais les impulsions sur les pattes externes sont inchangées entre les deux graphes. Donc *a fortiori* pour la patte externe associée au boson de Goldstone, l'impulsion vérifie  $p_\phi^2 = M_V^2$  alors que les propagateurs des bosons de Goldstone qui sont présents dans l'amplitude sont de la forme  $1/(q^2 - \xi M_V^2)$ .

jauges ont été remplacés par leur scalaires de Goldstone, et les autres pattes externes restent inchangées<sup>(3)</sup>.

## 3.2 Jauges de fond

La problématique des jauges de fond peut se poser de la façon suivante: si on réalise des collisions entre particules non plus dans le vide mais dans l'environnement d'un champ électromagnétique, comment tenir compte de ce nouveau champ dans l'intégrale fonctionnelle. Tel que le problème est posé, ce champ est de nature classique, et on ne doit donc pas intégrer par rapport à ce champ dans la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green (dans la suite les champs de fond seront notés avec un chapeau). Si on ne regarde que la partie Yang-Mills de la théorie, la fonctionnelle génératrice s'écrit :

$$Z[J, \hat{A}] = \int \mathcal{D}A_\mu \det \left[ \frac{dG(\omega)}{d\omega} \right] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(A + \hat{A}) - \frac{1}{2\xi} G^2 + J_\mu \cdot A^\mu} \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{L}$  est le lagrangien de la théorie,  $G$  est une fonction des champs qui brise l'invariance de jauge<sup>(4)</sup>. Le déterminant exprime les variations de la mesure de l'intégrale lors d'une transformation de jauge, et sera ultérieurement éliminé pour faire place au lagrangien des fantômes de Faddeev-Popov dans l'exponentielle. Sa contribution est par construction celle du déterminant et permet de faire des calculs perturbatifs en utilisant pour les fantômes des règles de Feynman comme pour le reste du lagrangien. Ces fantômes n'interviennent en fait que dans les boucles

---

<sup>(3)</sup>Pour l'application à un nombre quelconque de bosons de jauge longitudinaux, la démonstration précédente ne peut plus s'appliquer (elle est fausse). La démonstration la plus rigoureuse du théorème d'équivalence utilise les relations de commutation de l'opérateur BRS avec le lagrangien de fixation de jauge [30]

<sup>(4)</sup>Le rôle de  $G$  est de permettre de définir les propagateurs des champs de jauge, qui sinon sont indéterminés à cause de la symétrie de jauge.

fermées, car il ne sont pas des champs physiques, et sont toujours présents par paires dans les vertex.

Pour fixer la jauge du champ quantique, on choisi une expression qui permet de conserver l'invariance de jauge dans le champ classique. Pour cela, le plus simple est de prendre la dérivé covariante du champ quantique par rapport au champ classique ce qui donne l'expression suivante (qu'on appelle Jauge de Fond) :

$$G^a = \partial_\mu A^{a,\mu} + gf^{abc} \hat{A}_\mu^b A^{c,\mu} \quad (3.10)$$

Quelles sont les applications de cette méthode? Comme on l'a mentioné dans le début de cette section, il peut être intéressant de regarder l'influence d'un champ électromagnétique extérieur. On peut montrer en effet qu'il peut se produire des transitions de phases. Par exemple, dans une théorie non-abélienne spontanément brisée, on peut montrer (voir [51]) que pour une certaine intensité du champ électromagnétique extérieur il se produit une transition de phase qui restaure la symétrie de jauge qui était brisée<sup>(5)</sup>.

L'application qui a eu probablement le plus de succès, c'est la simplification des graphes de Feynman en QCD pour une ou plusieurs boucles[50]. En effet, en fixant la jauge du champ quantique à l'aide de la jauge de fond (3.10), la théorie présente une symétrie de jauge par rapport au champ classique grâce à cette dérivée covariante en  $\hat{A}$ . Le champ quantique quant à lui n'apparaît que dans les boucles.

On peut aussi utiliser ce type de jauge pour la théorie électrofaible (qui nous intéresse tout particulièrement) [53]. Si on note dans ce cas le champ classique

---

<sup>(5)</sup>Cet effet se produit dans l'action effective à une boucle (Coleman-Weinberg [52]). Si le champ de jauge est abélien, l'effet se produit à l'ordre de l'arbre: l'intensité du champ externe remonte l'énergie du vide jusqu'à obtenir un vide stable pour une certaine valeur critique de ce champ (analogue à l'effet Meisner en supraconductivité).

(champ de fond) par (“cl”) et la partie quantique (“Q”) on aurait pour fixer la jauge :

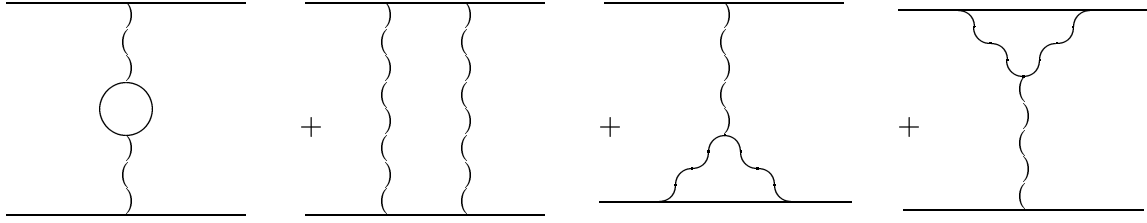
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{fond} &= -\frac{1}{\xi} |(\partial.W_Q^+ + ig(W_{cl}^{(3)}.W_Q^+ - W_Q^{(3)}.W_{cl}^+) + \frac{i}{2}\xi S^+|^2 \\
&- \frac{1}{2\xi} |(\partial.A_Q + ie(W_{cl}^+.W_Q^- - W_Q^+.W_{cl}^-) + ie\xi(\varphi_Q^+\varphi_{cl}^- - \varphi_{cl}^+\varphi_Q^-)|^2 \\
&- \frac{1}{2\xi} |(\partial.Z_Q + igc_W(W_{cl}^+.W_Q^- - W_Q^+.W_{cl}^-) \\
&+ i\xi \frac{1}{2s_W c_W} ((c_W^2 - s_W^2)(\varphi_Q^+\varphi_{cl}^- - \varphi_{cl}^+\varphi_Q^-) + i(H_Q\varphi_{3cl} - (v + H_{cl})\varphi_{3Q}))|^2 \\
S^+ &= \varphi_Q^+(v + H_{cl} - i\varphi_{3cl}) - \varphi_{cl}^+(H_Q - i\varphi_{3Q}) \tag{3.11}
\end{aligned}$$

(voir conventions en annexe B). On peut remarquer que si formellement on élimine les champs classiques chargés puis que l’on transforme les autres champs classiques en champs quantiques, on retombe bien sur l’expression de notre jauge non-linéaire eq. (3.4), avec  $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \tilde{\delta} = \tilde{\kappa} = \tilde{\varepsilon} = \xi_W = \xi_Z = \xi_\gamma = 1$ . Avec ce type de jauge on simplifie les calculs à une ou plusieurs boucles et c’est dans ce genre de calculs qu’on trouve le plus d’applications (comme par exemple évaluer des effets de corrections radiatives du Higgs [54]). La nouveauté que nous avons apportée consiste à utiliser une jauge non-linéaire très proche de la forme de la jauge précédente (3.11) pour faire des calculs à l’arbre, alors qu’auparavant les jauges non-linéaires du type (3.4) n’étaient utilisées que dans des calculs comportant des boucles.

### 3.3 Technique “Pinch”

Cette technique [55] consiste à opérer une réorganisation des différents termes qui constituent une amplitude de diffusion, de façon à obtenir des composantes

indépendantes du paramètre  $\xi$  qui intervient dans la jauge  $R_\xi$  dont il a été question précédemment. A la base de cette technique, on utilise les identités de Ward-Takahashi (voir annexe C) simples de type QED. Imaginons par exemple que l'on veuille définir d'une façon nouvelle la self-énergie du  $W$  de sorte que cette fonction soit indépendante de  $\xi$ . Pour cela, considérons une amplitude physique faisant intervenir le propagateur du  $W$  comme par exemple sur le schéma suivant :



Chacun de ces 4 graphes dépend séparément du paramètre  $\xi$  mais néanmoins, la somme n'en dépend pas. La méthode “Pinch” est un algorithme qui permet de réordonner les différents termes qui apparaissent dans cette somme. Comme son nom l'indique cet algorithme réalise formellement un “pincement” entre plusieurs propagateurs pour les faire se rejoindre en un point. Considérons en effet la figure suivante :

$$e \xrightarrow{\nu_e(k)} e = \frac{-ig^2}{k^2} \bar{u} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu u \cdot \pi_{\mu\mu'} \cdot \pi_{\nu\nu'}$$

avec  $\pi_{\mu\mu'} \propto (g_{\mu\mu'} + Cp^\mu p^{\mu'})$ . On peut alors utiliser la décomposition suivante :



$$\gamma_\mu p^\mu = \not{p} = (\not{p} + \not{k} - m_e) - (\not{k} - m_e) \quad (3.12)$$

Invoquant l'équation de Dirac on a  $\bar{u}(\not{p} + \not{k} - m_e) = 0$  et on obtient un terme de la forme  $\frac{1}{k^2} \bar{u}(\not{k} - m_e) \not{k} \gamma^\nu u = \bar{u} \gamma^\nu u - \frac{m_e}{k^2} \bar{u} \not{k} \gamma^\nu u$  et le premier terme a la forme d'un courant (on a "pincé" les deux vertex en un seul qui a l'indice  $\mu$ ).

Répétant cette procédure autant de fois qu'on le peut, l'amplitude fini par s'écrire sous la forme  $J^\mu \hat{\pi}_{\mu\nu} J^\nu + \dots$  où les autres termes ne peuvent pas se réécrire comme une interaction entre deux courants via un seul propagateur effectif  $\hat{\pi}_{\mu\nu}$  (dont on peut montrer qu'il ne dépend pas de  $\xi$ ). Il a été démontré (voir Watson dans [55]) d'ailleurs que les nouvelles fonctions de Green que l'on obtient par cette méthode correspondent exactement à celles que l'on calcule en jauge de fond avec le paramètre de jauge  $\xi$  égal à 1 (ce résultat a été montré à une boucle et à ma connaissance, le cas à deux boucles n'est pas encore établi).

## 3.4 Jauge de Gervais-Neveu inspirée des cordes, factorisation des couleurs

### 3.4.1 Factorisation des couleurs et méthode XZC

Une question intéressante dans les théories de jauge comportant plusieurs charges est de savoir comment ces charges circulent à l'intérieur des graphes de Feynman. En étudiant ces propriétés de conservation de ces charges, Chan et Paton [56] ont montré qu'on pouvait sommer certains graphes entre eux qui ont en commun un facteur de charge (appelé par la suite facteur de Chan-Paton). Ce facteur peut s'écrire en fait comme une trace d'un produit de générateurs du groupe de jauge.

Prenons un exemple. Considérons un groupe de jauge  $SU(N)^{(6)}$  dont nous noterons les générateurs  $T^a$  (normalisés à  $Tr(T^a T^b) = \delta^{ab}$ ) et les constantes de structure valent :

$$f^{abc} = -\frac{i}{\sqrt{2}} Tr([T^a, T^b] T^c) \quad (3.13)$$

Une amplitude quelconque impliquant  $n$  bosons de jauge pourra alors formellement s'écrire :

$$\mathcal{M}(\{k_1, \varepsilon_1, a_1\}, \dots, \{k_n, \varepsilon_n, a_n\}) = g^{n-2} \sum_{\sigma \in S_n/Z_n} Tr(T^{a_{\sigma(1)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}) A_n(k_{\sigma(1)}, \varepsilon_{\sigma(1)}; \dots; k_{\sigma(n)}, \varepsilon_{\sigma(n)}) \quad (3.14)$$

où les  $k_i$  sont les impulsions des particules externes et  $(\varepsilon_i, a_i)$  sont les polarisations et couleurs associées. En obtenant cette décomposition, Chan et Paton ont observé d'intéressantes propriétés de symétrie sur l'amplitude partielle  $A$ . Elle possède en effet la symétrie par permutation circulaire des particules, de sorte que dans la somme on se limite aux permutations appartenant à l'ensemble  $S_n/Z_n$  des permutations qui ne sont pas des permutations circulaires. Cette première opération réduit déjà significativement le nombre de termes que comprend l'amplitude. Les amplitudes partielles  $A$  possèdent d'autres propriétés intéressantes telles que l'invariance de jauge ( $A(\dots; k_i, \varepsilon_i \rightarrow k_i; \dots) = 0$ ), et en utilisant la notation condensée  $A(1, \dots, n) = A(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_n, \varepsilon_n)$ , on a la propriété suivante par reflexion :  $A(n, \dots, 1) = (-1)^n A(1, \dots, n)$ . Une simplification supplémentaire intervient dans une théorie confinée car on ne s'intéresse pas aux états propres de couleur mais on fait la somme sur ces charges. On obtient ainsi des expressions très compactes pour des amplitudes *a priori* très

---

<sup>(6)</sup> On préfère souvent prendre plutôt un groupe  $U(N)$  qui permet d'utiliser des identités de Fierz ( $Tr(T^a X) Tr(T^a Y) = Tr(XY)$ ,  $Tr(T^a X T^a Y) = Tr(X) Tr(Y)$ ) pour simplifier l'expression des amplitudes.

complexes telles que l’amplitude à 5 ou 6 gluons externes. Pour obtenir ce genre de résultat on combine les simplifications apportées par la “factorisation des couleurs” avec l’utilisation de produits de spineurs comme le font Xu, Zhang et Chang [57] (d’où le nom *méthode XZC*).

Pour obtenir avec une procédure universelle la décomposition de Chan et Paton, on peut faire intervenir une jauge spécifique, qui s’appelle la jauge de Gervais-Neveu [58]. Il s’agit d’une jauge non-hermitienne que l’on peut écrire :

$$\mathcal{L}_{fixation\ de\ jauge} = -\frac{1}{2}Tr \left[ (\partial \cdot A + \frac{ig}{\sqrt{2}}A^2)^2 \right] \quad (3.15)$$

(Notons qu’ici on prend le carré de l’expression et non le “module”). La particularité de ce formalisme réside dans le fait qu’on doit aussi modifier la façon usuelle de calculer des graphes avec des règles de Feynman. Ici les vertex sont orientés (par exemple dans le sens trigonométrique), et à cause de cette particularité on appelle ces règles “pseudo-règles de Feynman”. Un point intéressant sur cette jauge est qu’elle donne la même action effective à une boucle que la jauge de fond dans laquelle les paramètres de jauge  $\xi$  sont fixés à 1<sup>(7)</sup>. A l’arbre on retrouve avec cette jauge la décomposition de Chan-Paton, mais pour des calculs à plusieurs boucles, on ne connaît pas encore bien le lien entre cette jauge et la théorie de la réorganisation des cordes dont je parlerai plus loin [45], bien que des similitudes existent.

---

<sup>(7)</sup> On retrouve la même action effective en théorie des cordes, ce qui permet d’écrire de façon générique:  $\Gamma[A] \sim \ln \det^{\mp 1/2} [D^2 - \Sigma_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}]$  où  $\Sigma$  est le tenseur de spin et  $D$  la dérivée covariante [45]. Cette relation générique pour différents spins est typiquement supersymétrique.

### 3.4.2 Limite de tension infinie des cordes à la Polyakov

A l'origine des techniques de calcul d'amplitudes en QCD dont nous venons de parler (méthode XZC), on trouve la théorie des cordes [45, 59, 60] et on peut se demander quel rapport il peut y avoir entre ces deux théories qui semblent si éloignées. Le lien passe par l'utilisation commune de la théorie de Regge<sup>(8)</sup> [61] et l'invariance modulaire. En théorie des cordes [62] il existe une relation entre la masse au carré d'une particule et son moment cinétique. Cette relation est une relation affine et la pente de cette droite, en tant que fonction de  $J$  est l'inverse de la tension de la corde. De sorte que dans la limite où cette tension est infinie, la masse de la particule ne dépend plus du moment cinétique. On a ainsi levé de façon maximale la dégénérescence entre les états, et il ne reste dans la théorie que les états de petites masse (état fondamental) et les autres états sont renvoyés à l'infini. Mais néanmoins les propriétés de symétrie que possèdent les cordes<sup>(9)</sup> restent. Il reste une symétrie par permutation des pattes externes (résidu de l'invariance modulaire), ainsi qu'un groupe de jauge (par exemple  $SU(N)$ ). Pour le lecteur qui a déjà vu un ruban de Möbius, la transformation qui consiste à prendre un ruban (ici corde ouverte, dite à la Polyakov) fermé et à le transformer en ruban de Möbius s'appelle un "twist" et revient à effectuer une conjugaison de charge sur la corde. L'invariance modulaire consiste à dire que l'action est invariante par cette transformation. Cette symétrie par permutation des pattes externes permet en QCD d'obtenir les termes de Chan-Paton, et l'avantage des cordes réside dans le fait qu'elles contiennent de façon naturelle ce type de symétrie. Autrement dit, un seul graphe de Feynman entre cordes est équivalent à une somme de graphes d'une théorie de jauge dans lesquels on a effectué des permutations entre particules. Ecrivons donc comme pour

---

<sup>(8)</sup>La théorie de Regge repose sur le fait que lorsque on développe une amplitude de diffusion en ondes partielles, la décomposition obtenue est une fonction analytique du moment cinétique. Cette fonction admet des pôles dont la partie réelle ainsi que la partie imaginaire sont positives.

<sup>(9)</sup>Ces symétries sont assez complexes car elles reposent sur une algèbre ayant une infinité de générateurs que l'on appelle algèbre de Virasoro [63]. Les générateurs de cette algèbre décrivent en quelque sorte le spectre en masse des cordes, autrement dit contiennent les opérateurs de création et d'annihilation des cordes. A ces générateurs on peut rajouter ceux d'un groupe de jauge "standard", par exemple  $SU(N)$ , et la combinaison de ces deux algèbre est appelée algèbre de Kac's-Moody.

la factorisation des couleurs l'amplitude de diffusion entre  $n$  cordes :

$$\mathcal{M}^{string}(\{k_1, \varepsilon_1, a_1\}, \dots, \{k_n, \varepsilon_n, a_n\}) = g^{n-2} \sum_{\sigma \in S_n / Z_n} Tr(T^{a_{\sigma(1)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}) A_n^{KN}(k_{\sigma(1)}, \varepsilon_{\sigma(1)}; \dots; k_{\sigma(n)}, \varepsilon_{\sigma(n)}) \quad (3.16)$$

où cette fois-ci,  $A^{KN}$  représente l'amplitude partielle de diffusion pour des cordes telle qu'elle est définie par Koba et Nielsen dans [64].

Et dans la limite de tension infinie des cordes on retombe sur la décomposition de Chan-Paton (3.14). Dans cette limite on obtient aussi une relation entre différentes amplitudes partielles (que l'on peut identifier à une identité de Ward), et qui s'écrit<sup>(10)</sup> :

$$\sum_{\sigma \in Z_{n-1}} A(\sigma(1) \dots \sigma(n-1), n) = 0 \quad (3.17)$$

Il est important de signaler cette théorie car elle est puissante et prometteuse de simplifications importantes pour des calculs complexes d'amplitudes. L'objectif ici était juste d'esquisser le lien entre ces simplifications et la théorie des cordes. Je n'entrerais pas plus dans le détail de cette théorie (que je n'ai pas la prétention de maîtriser) d'autant qu'en pratique on n'a pas besoin d'utiliser une théorie complète et consistante de cordes. Comme je viens de le montrer, seuls certains points de la théorie des cordes interviennent.

---

<sup>(10)</sup> Cette relation est aussi appelée *Identité de Ward Duale*.

### 3.5 En résumé

Ces théories inspirées des cordes semblent puissantes bien que nous ne les ayons pas utilisées en pratique. Jusqu'à présent elles semblaient plutôt s'appliquer exclusivement à la QCD mais des articles très récents [65] sont dédiés à ces méthodes dans le cadre de l'interaction électrofaible. Ces travaux méritent toutefois d'être généralisés et développés avant de pouvoir être utilisés de façon systématique sur des processus compliqués. Pour l'instant, et bien que ces travaux soient intéressants, les jauges de type non-linéaires inspirées de jauges de fond nous semblent suffisantes pour nos besoins. De plus la jauge de Gervais-Neveu ressemble elle aussi un peu à une jauge de fond ce qui nous amène à penser que nous ne gagnerons pas nécessairement beaucoup à utiliser ce type de formalisme. Son intérêt néanmoins réside aussi dans le fait qu'il s'agit d'une méthode générale, alors que les jauges non-linéaires sont développées en fonction des processus étudiés, de façon à éliminer le plus possible de couplages compliqués.

# Chapitre 4

## Tester le potentiel de Higgs

### 4.1 Extensions possibles au modèle de brisure de symétrie

Le but des recherches entreprises ici est donc de sonder le potentiel de Higgs en  $\phi$ , en supposant implicitement que le boson de Higgs existe et qu'on en connaît la masse. De sorte qu'il nous reste seulement à étudier le terme  $(\phi^\dagger \phi)^2$  du lagrangien **GWS** et éventuellement des termes d'ordre supérieurs qui pourraient exister. Dans la jauge unitaire qui fait disparaître les bosons de Goldstone pour donner une masse aux bosons de jauge, la partie potentiel devient très simple et est juste constituée d'un polynôme (dans le champ de Higgs) qui contient des termes d'ordre 3 et 4, éventuellement plus pour un potentiel non minimal. Dans ce cas on aurait (quelle que soit la jauge) :

$$V_{SSB} = \lambda \left\{ \sum_{n=2} \frac{g^{2(n-2)}}{\Lambda^{2(n-2)}} \frac{a_n}{(n-1)^2} \left[ \Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right]^n \right\} \quad (4.1)$$

Pour  $n = 2$  on retrouve le potentiel minimal ( $a_2 = 1$ ). La forme spécifique qui a été adoptée dans l'équation (4.1) est destinée à conserver la position du minimum du potentiel en  $\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle = v^2/2$  à tous les ordres, ce qui est imposé par la contrainte  $M_W = gv/2$ . En développant cette expression on obtient :

$$V_{SSB} = \frac{1}{2}M_H^2 \left\{ H^2 + \frac{g}{M_W}H(\varphi^+\varphi^- + \frac{\varphi_3^2}{2}) + \frac{g}{2M_W}h_3H^3 + h_4 \left( \frac{g}{4M_W} \right)^2 H^4 + h'_3 \left( \frac{g}{2M_W} \right)^2 H^2(\varphi^+\varphi^- + \frac{\varphi_3^2}{2}) \dots \right\} \quad (4.2)$$

Notons que le vertex  $H\varphi^+\varphi^-$  n'est pas affecté par la présence de termes d'ordres supérieurs, alors que non seulement le couplage  $H^3$  (coefficient  $h_3$ ), mais aussi le couplage  $H^4$  (coefficient  $h_4$ ) de même que  $H^2\varphi^+\varphi^-$  sont modifiés par rapport au Modèle Standard Minimal.

$$\begin{aligned} h_3 &= 1 + a_3 \frac{M_W^2}{\Lambda^2} = 1 + \delta h_3 \\ h_4 &= 1 + 6\delta h_3 \\ h'_3 &= 1 + 3\delta h_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

La première relation définit  $\delta h_3$  (variation de  $h_3$  par rapport au potentiel minimal) et les deux autres donnent les couplages  $H^4$  et  $H^2\varphi^+\varphi^-$  en fonction de cette variation. Notre travail consiste donc à chercher des moyens de mesurer les constantes de couplage associées aux termes d'ordre 3 ou 4. L'ensemble des résultats qui vont être exposés à ce sujet ont été publiés dans [66] (voir aussi [67, 68]). Jusqu'à présent, nous avons regardé en détail l'ordre 3 qui intervient dans plusieurs processus tels que ceux représentés sur la figure 4.1 (ne sont représentés que les diagrammes les plus significatifs à haute énergie). L'ordre 4 nous paraît hors de portée étant donnée la petitesse des sections efficaces auxquelles on s'attend. Pour le couplage à trois



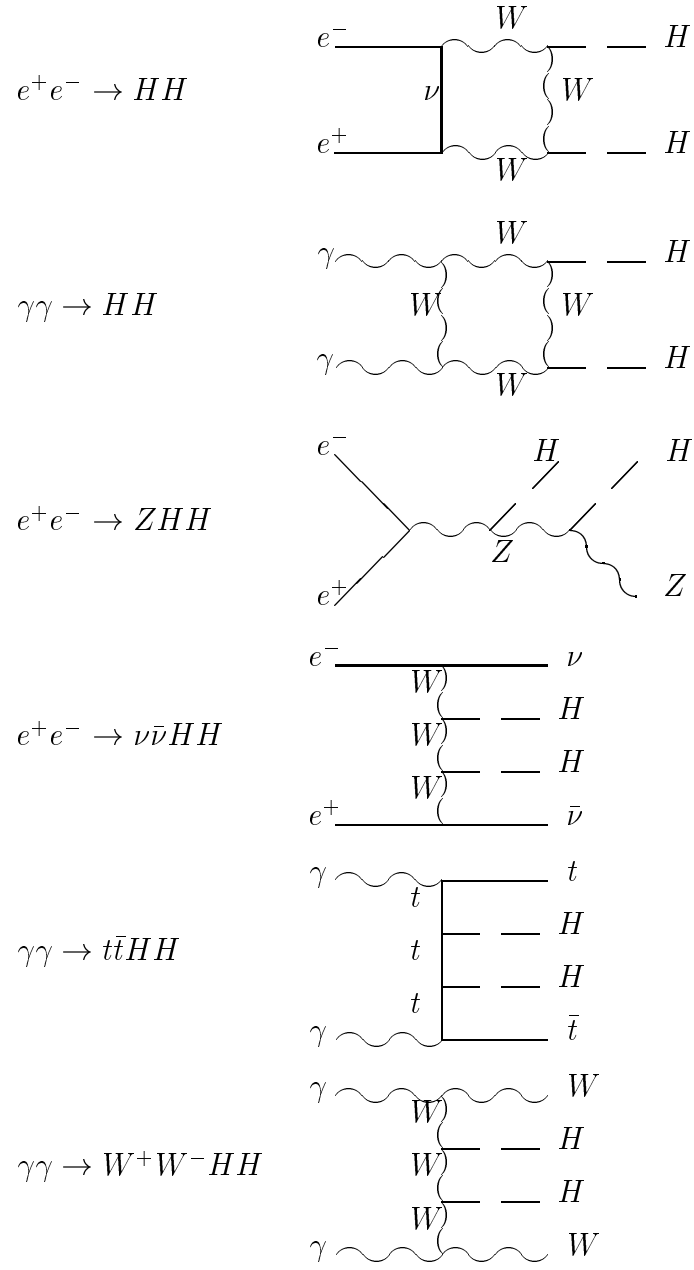
Higgs nous avons été amenés à comparer certains des processus qui ont des sections efficaces *a priori* suffisantes pour produire un minimum d'événements dans le cadre d'un collisionneur linéaire à 2 TeV. Notons qu'au collisionneur LHC certains processus auront aussi des sections efficaces non-négligeables (production de Higgs par fusion de gluons ou de  $W$ ) mais le bruit de fond en quarks et gluons sera si fort, que détecter précisément un Higgs de masse intermédiaire (qui donne prioritairement deux jets de quarks  $b$ ) rendra très difficile la mesure des selfs-couplages du Higgs. Nous nous sommes donc intéressés en particulier à  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$  que j'ai recalculé, à  $\gamma\gamma \rightarrow HH$  et à  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  dont j'ai calculé les amplitudes hélicités qui sont relativement complexes. Dans ces deux derniers processus il a fallu tenir compte du fait que faire des collisions de photons créent des difficultés technologiques particulières. Les principales difficultés sont d'obtenir des photons avec un spectre d'énergie le plus étroit possible, et que ces photons soient de haute énergie car nous verrons qu'un processus tel que  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  est favorisé à haute énergie. Pour comparer raisonnablement des sections efficaces de processus dans le mode  $e^+e^-$  et dans le mode  $\gamma\gamma$ , il nous faut donc vérifier qu'on peut obtenir des spectres de photons piqués vers les hautes énergies, ce que je vais montrer dans la section suivante, en faisant quelques rappels sur les collisionneurs à photons.

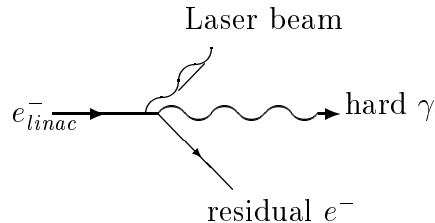
#### 4.1.1 Les collisionneurs $\gamma\gamma$

Quelles sont les spécificités des collisionneurs à photons? Contrairement aux faisceaux d'électrons, on peut obtenir un mode de polarisation  $J_z = 0$  favorable à la production de particules scalaires, mais aussi à la production de bosons de jauge longitudinaux [69]. Le mode  $\gamma\gamma$  s'avère donc très intéressant pour l'étude de la brisure de symétrie dans la théorie électrofaible (que celle-ci ait lieu grâce à un boson de Higgs ou non d'ailleurs).

Pour réaliser des collisions de photons, on envoie un faisceau laser sur un faisceau

**Fig. 4.1:** *Processus incluant le vertex  $H^3$*



**Fig. 4.2:** *Rétrodiffusion Compton*

d'électrons (ou de positrons) à très haute énergie. Par effet de rétrodiffusion Compton ( $e_{linac}\gamma_{laser} \rightarrow e\gamma$ ), il y a alors “transfert” d'énergie et l'électron excité par le laser se “désintègre” en un photon très énergétique et un électron résiduel de faible énergie. Si le laser est très puissant, on peut obtenir la même luminosité en photons qu'en électrons incidents, voire plus avec des diffusions multiples mais dans ce cas on élargi le spectre en énergie des photons. C'est en effet l'inconvénient majeur de ces collisionneurs, les photons n'ont pas une énergie fixée mais un spectre en énergie plus ou moins large suivant la configuration du collisionneur.

### 4.1.2 Les spectres de photons

Pourquoi utiliser la rétrodiffusion Compton plutôt que le simple rayonnement de bremsstrahlung? Par rayonnement de bremsstrahlung, la formule de Weizsäcker-Williams nous apprend que les photons émis sont majoritairement de basse énergie alors qu'il nous faudrait plutôt des photons de haute énergie (les processus que nous avons étudié sont plus intéressants à haute énergie). L'idée de Ilia Ginzburg et d'autres [70] dans les années 70 a été de produire des photons de haute énergie par rétrodiffusion Compton (voir fig. 4.2).

Cela fait alors intervenir une fonction de luminosité qui donne la probabilité d'obtenir une paire de photons d'une certaine énergie à partir de deux faisceaux

d'électrons incidents. La nouvelle section efficace devient :

$$d\sigma_{\bar{e}e}(\bar{\lambda}, \lambda, s, \dots) \simeq \int_{s_{th}/s}^{x_m^2} d\tau \sum_{\mu, \bar{\mu}=\pm 1} \frac{dL_{\gamma\gamma}(\bar{\lambda}, \lambda, \bar{\mu}, \mu; \tau)}{d\tau} d\sigma_{\gamma\gamma}(\bar{\mu}, \mu; \tau s, \dots) \quad (4.4)$$

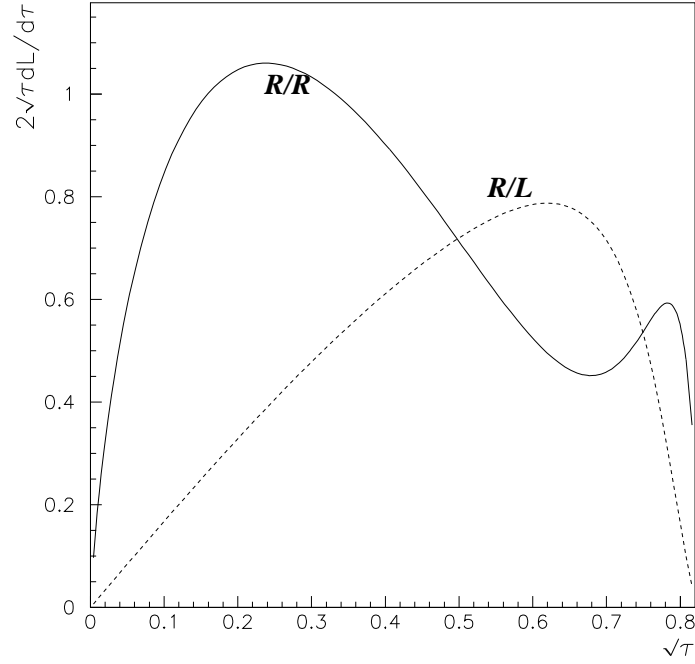
Où  $\lambda = \pm 1$  (resp.  $\bar{\lambda}$ ) représente l'hélicité de l'électron (resp. positron),  $\mu = \pm 1$  et  $\bar{\mu}$  les hélicités des photons qui rentrent en collision (pour une revue de base sur les problèmes de polarisation des électrons à haute énergie, voir [71]). Pour calculer la fonction de luminosité  $L_{\gamma\gamma}$ , on peut le faire de la façon suivante (voir [72] et [73]) :

$$\frac{dL_{\gamma\gamma}}{d\tau} = \int_{\tau/x_m}^{x_m} \frac{dx}{x} f_{\gamma}(x) f_{\gamma}(\tau/x) \quad (4.5)$$

en posant :

$$\begin{aligned} f_{\gamma}(\lambda, \mu, \xi; x) &= \frac{1}{2}(1 + \mu\xi)f_+(\lambda\xi; x) + \frac{1}{2}(1 - \mu\xi)f_-(\lambda\xi; x) \\ f_+(\lambda\xi; x) &= \frac{1-r}{A(\lambda\xi; x_0)} \left[ \frac{1}{1-x} + 1 - x - 2r + \lambda\xi r x_0 \{(1-r)(2-x) + rx\} \right] \\ f_-(\lambda\xi; x) &= \frac{2r}{A(\lambda\xi; x_0)} \left[ \frac{1}{1-x} + 1 - x - 2(1-r) - \lambda\xi r x_0 \{r(2-x) + (1-r)x\} \right] \\ r &= x/(x_0(1-x)) \\ A(\lambda\xi; x_0) &= \left( 1 - \frac{4}{x_0} - \frac{8}{x_0^2} \right) \ln(1+x_0) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x_0} - \frac{1}{2(1+x_0)^2} \\ &+ \lambda\xi \left[ \left( 1 + \frac{2}{x_0} \right) \ln(1+x_0) - \frac{5}{2} + \frac{1}{1+x_0} - \frac{1}{2(1+x_0)^2} \right] \end{aligned}$$

où  $\xi = \xi_-, \xi_+ \in [-1; 1]$  est le degré de polarisation des lasers qui frappent les faisceaux d'électrons ou de positrons et  $x_0 = 2\sqrt{s}\omega_{\text{laser}}/m_e^2$  est un paramètre caractéristique de la configuration générale des convertisseurs électrons/photons, et

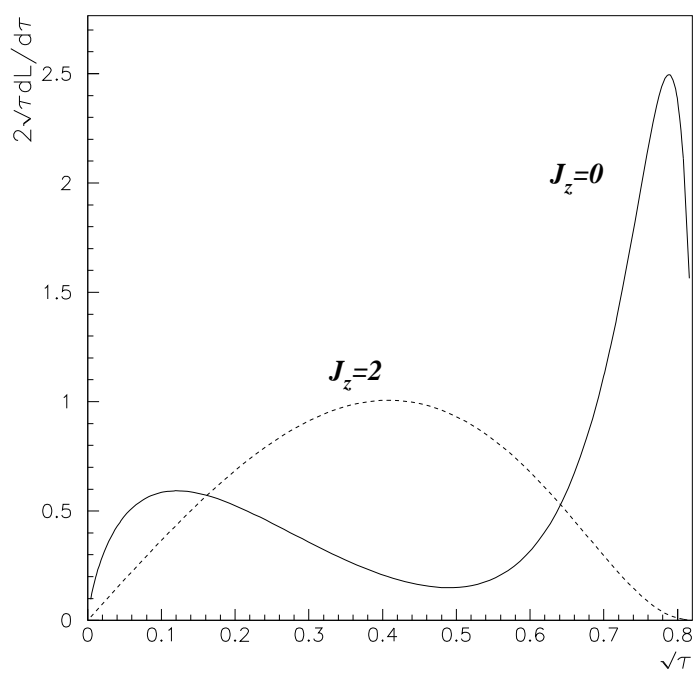
**Fig. 4.3:** *Spectres non polarisés*

dont la valeur optimale est 4.82 et  $x_m = x_0/(1 + x_0)$  est la fraction maximale de l'énergie totale que peuvent emporter les photons par rapport à l'énergie des électrons (positrons) incidents.

Si on représente la fonction  $2\sqrt{\tau}\frac{dL}{d\tau}$  on obtient 2 courbes dans le cas où les électrons initiaux sont non-polarisé et où les lasers sont tous les deux polarisés à 100% avec des polarisations de mêmes signes ou de signes opposés, et on obtient la figure 4.3.

Si maintenant on prend des deux faisceaux d'électrons polarisés gauches et en prenant deux lasers 100% droits on obtient les spectres de la figure 4.4. Si l'un des lasers est polarisé 100% droit et l'autre 100% gauche, les courbes sont les mêmes à ceci près qu'elles correspondent alors à des spins inversés par rapport à la figure 4.4.

**Fig. 4.4:** *Spectres polarisés*



Il faut toutefois prendre tous ces résultats avec prudence parce que l'effet des diffusions multiples des électrons dans le champ du laser sont encore mal connus et les spectres que l'on est censé obtenir à ces énergies élevées ne sont pas définitifs. Notons encore que l'influence de la polarisation du laser sur la polarisation des photons produits a été il y a encore peu sujet à polémique [74], bien qu'à mon avis, ce problème devrait être réglé bientôt s'il ne l'est pas encore.

Le résultat important qui ressort de la figure 4.4, c'est qu'on peut effectivement obtenir un spectre en énergie assez peu large et surtout que dans cette configuration, le pic se situe dans la région des grandes énergies. Par conséquent, si on travaille sur la base d'un collisionneur  $e^+e^-$  à  $2\text{ TeV}$ , on pourra produire des paires de photons ayant une énergie voisine de celle des électrons incidents. Cela a donc un sens de comparer des sections efficaces de processus  $e^+e^-$  avec des processus  $\gamma\gamma$  comme nous allons le faire dans la suite. Maintenant que nous avons en quelque sorte fixé nos conditions expérimentales, nous pouvons donc aborder l'étude de ces processus qui font intervenir le couplage  $H^3$  pour chercher comment on peut le mesurer.

## 4.2 Le processus $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$

### 4.2.1 Propriétés de $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$

Ce processus simple, calculable aisément à la main a des propriétés intéressantes qui nous seront utiles dans la suite. La section efficace totale de ce processus tend vers une limite asymptotique lorsqu'on accroît l'énergie dans le centre de masse. Cette limite est de environ 80 pb, soit 10 fois supérieure à la section efficace du processus  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$  à 500 GeV (voir [75]). Comme la section efficace de ce dernier processus décroît avec  $\sqrt{s}$ , le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$  devient de plus en plus intéressant au fur et à mesure que l'on monte en énergie. C'est en cela

que réside l'intérêt essentiel des collisions  $\gamma\gamma$  par rapport aux collisions  $e^+e^-$ , pour des énergies de 500 GeV ou plus. De plus, déjà dans la production d'un seul Higgs par le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$  on s'apercevait que les sections efficaces sont prometteuses, augmentant comme le logarithme de l'énergie [73].

Regardons plus en détail le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ . D'un point de vue conservation du spin, on peut séparer le cas  $J_z = 0$  et le cas  $J_z = 2$  ( $J_z$  est la composante du moment angulaire le long de l'axe des faisceaux). Dans le cas où  $J_z = 0$ , on vérifie aisément qu'il est impossible de produire un  $W$  transverse (T) avec un longitudinal (L) le long de l'axe du faisceau. En fait, dans le cas  $J_z = 0$ , on peut même vérifier que cette amplitude est identiquement nulle dans tous l'espace de phase, ce qui est une propriété du modèle de jauge (à l'arbre). Si on rajoute des couplages anormaux par exemple (cas d'une nouvelle physique), on peut avoir un élément de matrice  $LT$  non nul en dehors de l'axe des faisceaux.

### 4.2.2 Analyse du processus en jauge unitaire

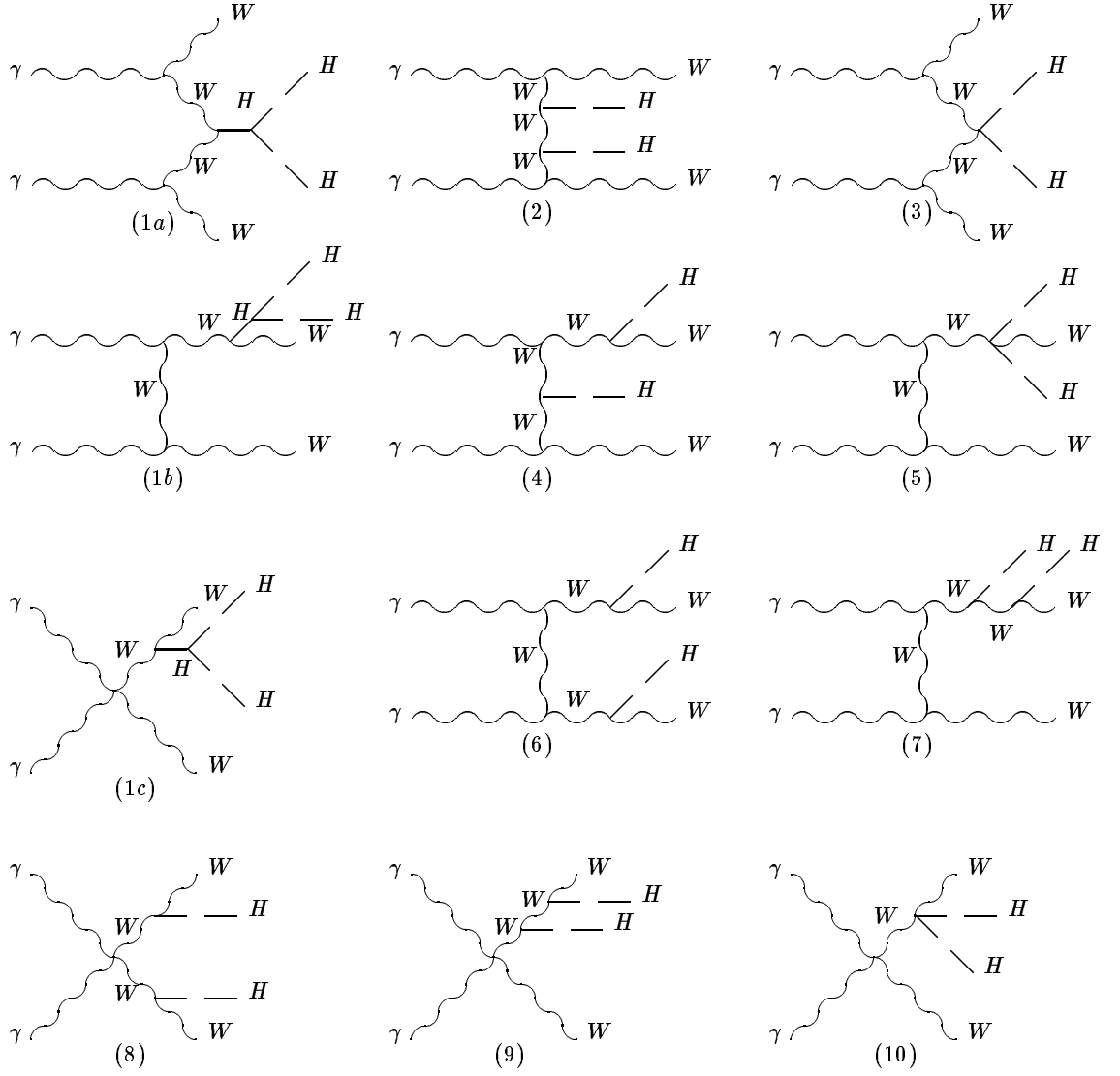
Le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  comprend 12 topologies possibles de graphes qui sont représentées sur la figure 4.5.

Les graphes (1a), (1b) et (1c) forment un sous groupe invariant de jauge du fait de la présence du vertex  $H^3$  qui ne provient que du terme de potentiel de brisure de symétrie. Avec toutes les symétries possibles sur ces graphes, on en dénombre au total 46. On verra plus loin qu'à haute énergie et pour un boson de Higgs relativement lourd, certains graphes dominent largement les autres ; ce sont les graphes dits de fusion de  $W$  qui forment la première ligne de la figure 4.5.

On pourrait se contenter de faire les calculs dans la jauge unitaire, seulement le vertex  $\gamma W^+W^-$  est un peu compliqué, et surtout les propagateurs contiennent



**Fig. 4.5:** Différentes topologies intervenant dans le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .



des termes en  $k_\mu k_\nu / M_W^2$  qui compliquent passablement les expressions. Il y a donc intérêt à changer de jauge, quitte à faire intervenir les bosons de Goldstone et donc à rajouter des graphes.

### 4.2.3 Intérêt de la jauge $R_\xi$ non linéaire

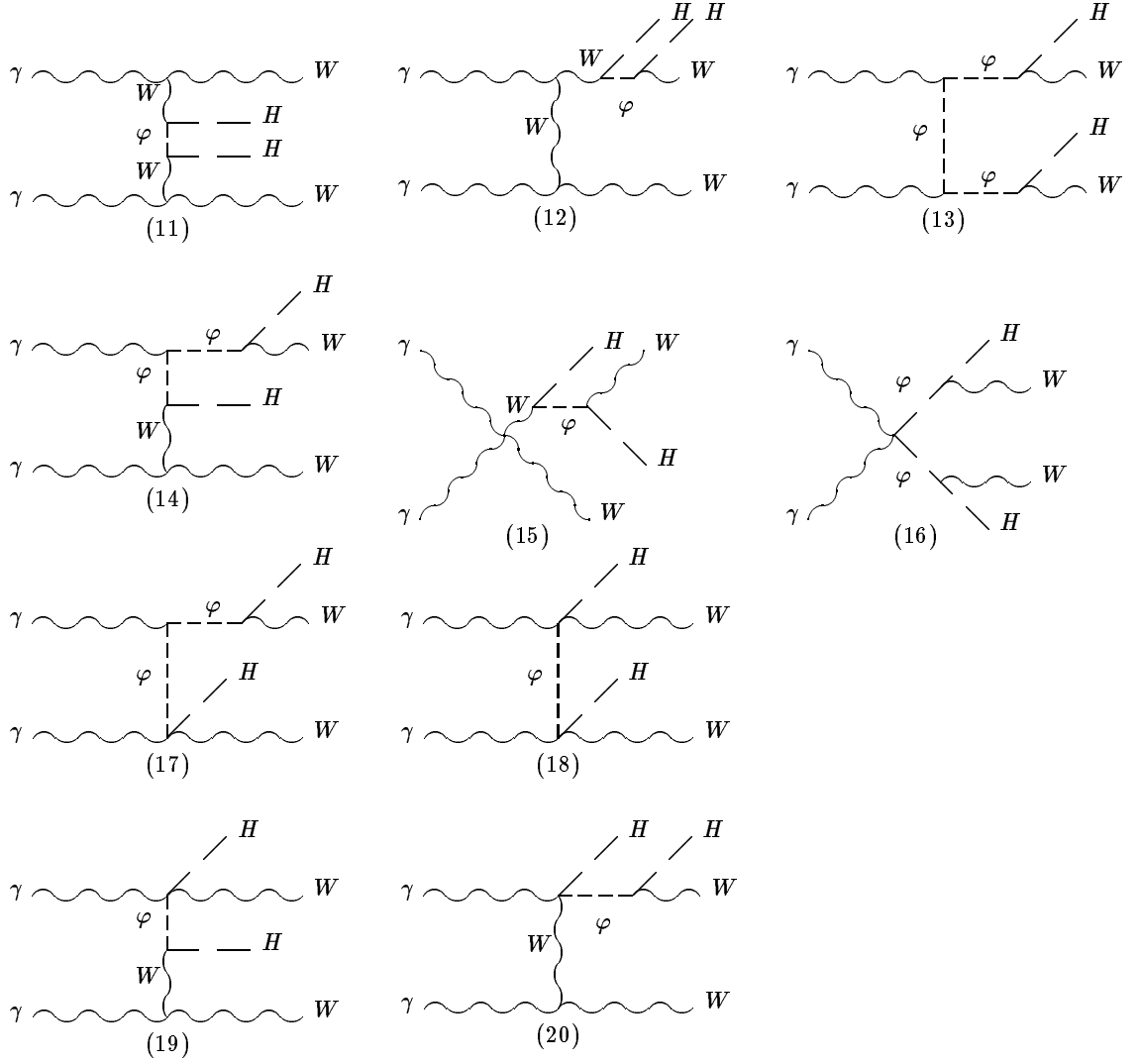
Pour simplifier les expressions des graphes on a donc choisi dans un premier temps de tester les simplifications qu'apportent les jauges non-linéaires telles que celles vues auparavant (chapitre 3, eq. (3.2)). En utilisant cette jauge non-linéaire et en prenant  $\alpha = \eta = \xi = 1$ , les règles de Feynman se simplifient énormément (voir [48]). En contrepartie, on fait donc intervenir les Goldstones et il apparaît des graphes supplémentaires représentés sur la figure 4.6.

Avec les symétries possibles, on obtient 58 graphes supplémentaires, ce qui en fait un total de 104 graphes. Nous verrons plus loin comment en supprimer 28 ce qui nous ramènera finalement à 76 graphes (en fait 18 graphes sur lesquels on implémente ensuite les symétries dans le programme de calcul).

### 4.2.4 Jauge $R_\xi$ modifiée et jauge de fond

Les calculs dans la jauge 't Hooft Feynman non linéaire que l'on vient de voir ont l'avantage de faire disparaître les couplages  $\gamma W \phi$  mais l'inconvénient de laisser des couplages  $\gamma W \phi H$  qui compliquent les expressions. Pour chaque graphe contenant un couplage de ce type, on est obligé de créer une routine spéciale de calcul. Les calculs sont simples pour la plupart des graphes sans Goldstones car ils se calculent à partir des graphes du processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$  en rajoutant juste deux couplages et deux propagateurs. Il n'y a presque que des symétries à implémenter. Par contre, l'importante variété de graphes avec Goldstone impose l'emploi de nombreuses rou-

**Fig. 4.6:** Autres topologies de graphes qu'il faut ajouter dans une jauge renormalisable même quand le vertex  $W^\pm\varphi^\mp\gamma$  est absent. Dans la jauge que nous avons finalement choisie, les 4 derniers graphes sont éliminés.



tines qui ralentissent beaucoup le calcul numérique. D'où l'intérêt d'essayer de modifier encore la jauge pour éliminer ces couplages "bâtards" à 4 points. C'est ce que nous avons fait en rajoutant un terme dans le lagrangien de fixation de jauge qui devient (voir chapitre 3).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gf} = & \\ & -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\eta}(\partial_\mu Z^\mu + \eta M_Z \chi)^2 \\ & -\frac{1}{\xi} |(\partial_\mu + igW_\mu^3)W^{+\mu} + i\xi M_W \varphi^+ + i\frac{g}{2}H\varphi^+|^2\end{aligned}\quad (4.6)$$

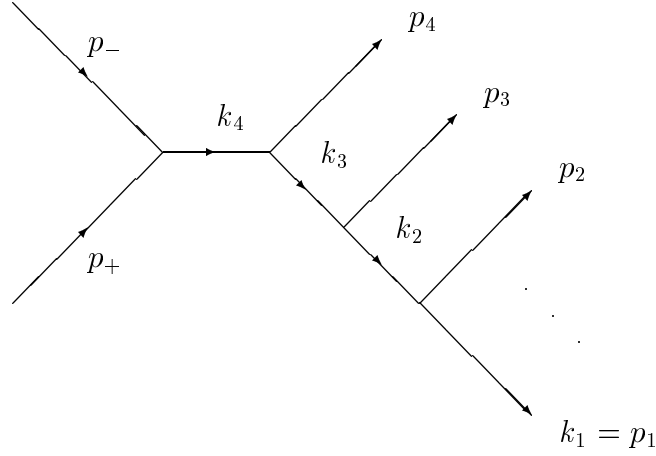
le terme supplémentaire  $i\frac{g}{2}H\varphi^+$  dans le module carré permet d'éliminer exactement les couplages "bâtards".

Nous avons donc effectué les calculs dans cette jauge où les graphes de type 17, 18, 19 et 20 disparaissent. Les modifications sur les autres graphes sont faibles. Dans notre cas, il suffit de modifier le vertex  $W_\mu^\pm \phi^\mp H$  qui valait  $\pm i\frac{g}{2}(p_\phi - p_H)_\mu$  et se simplifie pour devenir  $\mp igp_{H\mu}$ .

### 4.3 Espace de phase à 4 particules finales

Afin de calculer la section efficace du processus et certaines distributions, il a fallu construire un générateur d'événements à quatre particules finales compatible avec la routine d'intégration Vegas. La contrainte étant que l'espace des phases doit être exactement paramétré par un hypercube de côté 1. Pour quatre particules finales, le nombre de paramètres d'intégration s'élève à  $3n - 4 = 8$  et donc l'hypercube sera de dimension 8.

**Fig. 4.7:** *Processus virtuel déterminant une cinématique simple à calculer*



Pour calculer les 4 quadrivecteurs énergie-impulsion et l'espace de phase associé, on utilise les relations de récurrence dites “de genre temps”. Le principe consiste à considérer arbitrairement que le processus suit le graphe suivant :

La figure 4.7 se généralise évidemment pour  $n$  particules finales et nous allons rappeler brièvement le principe de la récurrence. Posons d'abords :

$$k_i = p_1 + \dots + p_i \quad (4.7)$$

$$M_i^2 = k_i^2 \quad (4.8)$$

$$\mu_i = m_1 + \dots + m_i \quad (4.9)$$

$$R_2(p, m_1^2, m_2^2) = \int d^4 p_1 d^4 p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \delta^4(p - p_1 - p_2) \quad (4.10)$$

Où  $R_2$  est l'espace des phases à 2 particules qui s'écrit dans le centre de masse :

$$R_2(s) = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{8s} \int d\Omega_1 \quad (4.11)$$

avec  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ . On a alors :

$$R_n(M_n^2) = \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} R_{n-1}(p - p_n) \quad (4.12)$$

$$= \int d^4 p_n \delta(p_n^2 - m_n^2) R_{n-1}(p - p_n) \quad (4.13)$$

$$= \int dM_{n-1}^2 \int d^4 k_{n-1} \int d^4 p_n \delta(k_{n-1}^2 - M_{n-1}^2) \delta^4(p - p_n - k_{n-1}) \delta(p_n^2 - m_n^2) R_{n-1}(p - p_n) \quad (4.14)$$

$$= \int_{\mu_{n-1}^2}^{(M_n - m_n)^2} dM_{n-1}^2 R_2(k_n^2, k_{n-1}^2, p_n^2) R_{n-1}(M_{n-1}^2) \quad (4.15)$$

$$= \int_{\mu_{n-1}^2}^{(M_n - m_n)^2} dM_{n-1}^2 \int d\Omega_{n-1} \frac{\lambda^{1/2}(M_n^2, M_{n-1}^2, m_n^2)}{8M_n^2} R_{n-1}(M_{n-1}^2) \quad (4.16)$$

Et on exprime ainsi l'espace des phases à  $n$  particules en fonction de l'espace des phases à  $n - 1$  particules via l'espace des phases à deux particules. Par récurrence on obtient la formule générale :

$$R_n(M_n^2) = \int_{\mu_{n-1}}^{M_n - m_n} \dots \int_{\mu_2}^{M_3 - m_3} dM_{n-1} \dots dM_2 d\Omega_{n-1} \dots d\Omega_1 \frac{1}{2M_n} \prod P_i \quad (4.17)$$

avec  $P_i = \lambda^{1/2}(M_i^2, M_{i-1}^2, m_i^2)/2M_i$ .

Et enfin, pour calculer les impulsions, il suffit d'écrire que  $p_i = (M_i, 0) - k_{i-1}$  dans le centre de masse de  $k_i$ . Par récurrence et en incluant les transformations de Lorentz nécessaires au fur et à mesure, on calcule finalement toutes les impulsions en fonction des paramètres d'intégration.

## 4.4 Résultats

### 4.4.1 Tests de validité de l'amplitude

Etant donné le nombre important de graphes de Feynman que représente ce processus, il est important d'effectuer de nombreux tests sur l'amplitude calculée avant de calculer d'autres quantités (section efficaces totales ...).

Le premier test à effectuer est de vérifier l'invariance de jauge  $U(1)_{em}$  de l'amplitude. Dans la représentation impulsion où l'on calcule l'amplitude, un changement de jauge revient à ajouter aux polarisations des photons un quadrivecteur colinéaire à leur impulsion. L'invariance de jauge sera donc vérifiée si en remplaçant les polarisations des photons par leur quadrivecteur impulsion, l'amplitude est nulle, ce qui se teste aisément numériquement.

Ensuite on peut vérifier à l'aide d'un Monte Carlo les symétries entre les deux  $W$  et les deux  $H$  sur leurs distributions en certains paramètres et leur énergie moyenne.

On vérifie aussi numériquement que, lorsque les deux  $W$  sont sur l'axe du faisceau, produire à la fois un  $W$  transverse et un longitudinal est impossible, de même que pour le processus plus simple  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$  vu auparavant. Les Higgs étant scalaires, ils ne modifient pas les propriétés de spin.

De plus, on voit sur un Monte Carlo qu'à basse énergie, les interférences entre le "signal" (graphes contenant le vertex  $H^3$ ) et le "bruit de fond" (le reste des graphes) sont très importantes. Il est donc très important de vérifier leur signe (donc la valeur du vertex  $H^3$ ) car ces interférences sont destructives. Nous l'avons donc vérifié avec le logiciel CompHEP sur le processus  $W^+W^- \rightarrow HH$ .

Enfin, le sous groupe  $H^3$  peut se décomposer en  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$  suivi de la désintégration du  $H$  en deux autres ce qui donne juste un facteur multiplicatif sur l’amplitude. On a donc comparé les résultats obtenus sur ce sous groupe en retirant le facteur multiplicatif, avec les résultats calculés par M. Marc Baillargeon et eux mêmes comparés avec les résultats donnés par le logiciel Comphep[76].

Suite à tous ces tests, nous avons estimé que l’amplitude que j’avais calculée était correcte, nous permettant ainsi de calculer la section efficace et les distributions en fonction de  $\sqrt{s}$ .

#### 4.4.2 Sections efficaces

L’amplitude du processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  a donc été implantée dans un programme Monte-Carlo, en essayant de l’optimiser pour limiter la quantité de calculs. Malgré cela, d’importantes erreurs numériques apparaissent vers  $\sqrt{s} = 4 \text{ TeV}$ , dues principalement aux nombreux propagateurs présentant des pics très étroits dans l’espace de phase, et il a fallu adapter le programme qui génère des événements dans l’espace de phase. Pour réaliser cette amélioration du Monte-Carlo, il faut trouver où sont ces pics très étroits sur lesquels il faudra donc “zoomer”. En étudiant la distribution angulaire des  $W$  produits à haute énergie dans  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  (voir figure 4.8), on constate que ceux ci sont produits à très petit angle.

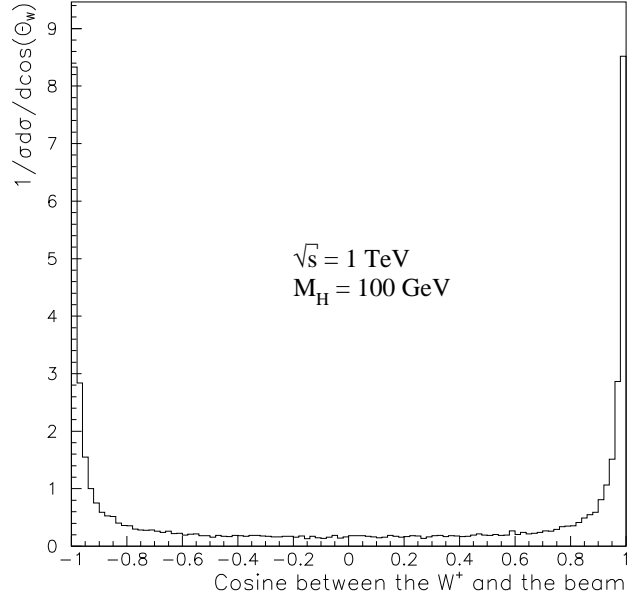
Et les pics sont de plus en plus fins à mesure que l’énergie augmente. On peut donc utiliser cette propriété pour améliorer le calcul numérique<sup>(1)</sup> des sections efficaces et des distributions. En pratique, les variables utilisées par le générateur d’événements ne sont pas directement les variables géométriques décrivant la direction des impul-

---

<sup>(1)</sup>Pour réaliser l’intégration sur les variables d’espace de phase, j’ai utilisé le programme VEGAS [77] qui réalise l’intégration en plusieurs étapes. Il subdivise l’espace des paramètres en grilles successives qui s’adaptent à la fonction à intégrer. La grille est de plus en plus fine là où la fonction a ses plus grandes valeurs.



**Fig. 4.8:** *Distribution du  $\cos(\Theta_W)$  dans le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .*



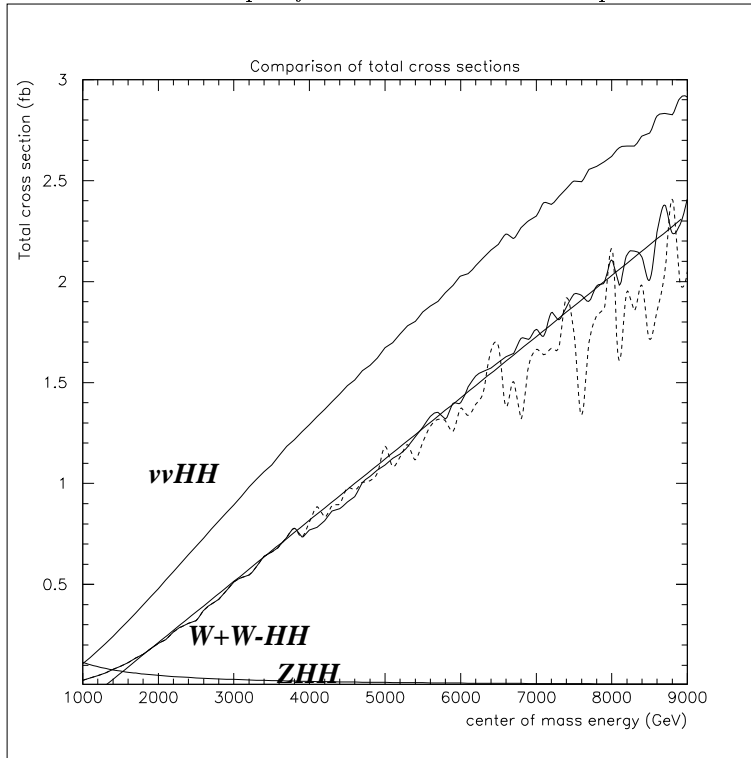
sions des  $W$ , mais certaines variables  $y$  sont reliées et présentent des pics similaires dans leur distribution. On a donc fait pour ces variables le changement suivant :

$$c' = 1 - \sigma \log^n(1 + \lambda \cdot c) \quad (4.18)$$

en prenant  $n$  de l'ordre de 10,  $\lambda = 1.92$  et  $\sigma = 10^{-3}$ . En toute rigueur il faudrait faire décroître  $\sigma$  avec l'énergie mais en pratique on peut s'en passer, d'autant qu'il faudrait connaître la variation optimale exacte de  $\sigma$  en fonction de l'énergie, ce qui n'est pas très facile à obtenir. La courbe de section efficace devient alors nettement moins perturbée comme on le voit sur la figure 4.9.

Sur cette figure 4.9, on a laissé une échelle linéaire verticalement, de façon à mieux mettre en évidence l'amélioration par rapport à l'ancienne courbe qui est représentée

**Fig. 4.9:** Amélioration significative de l'intégrateur. La courbe du haut représente la section efficace  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$ , celle du bas  $e^+e^- \rightarrow ZHH$ . Entre les deux et en pointillé, la section efficace de  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^- HH$  obtenue avec un générateur d'événements non-adapté, et en trait plein avec un générateur adapté. Est aussi superposée une droite obtenue par fit de la courbe en trait plein.

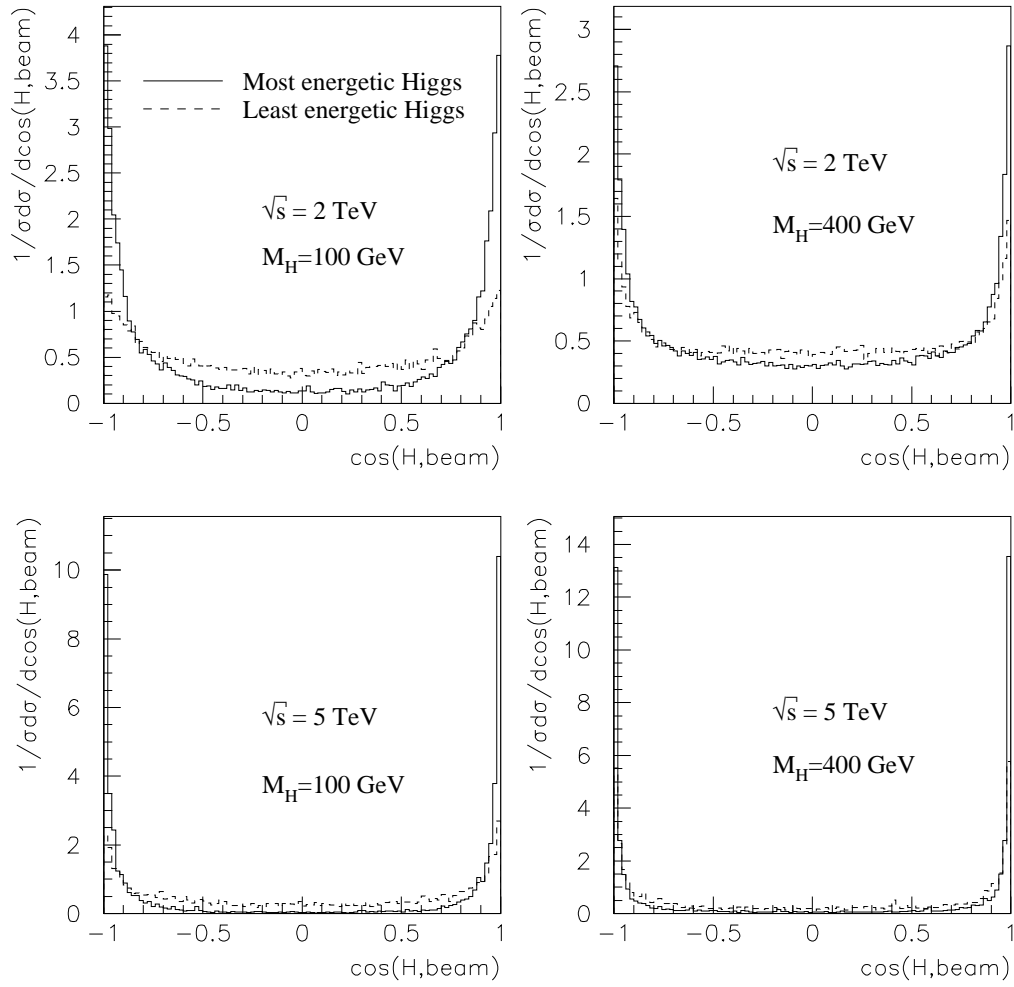


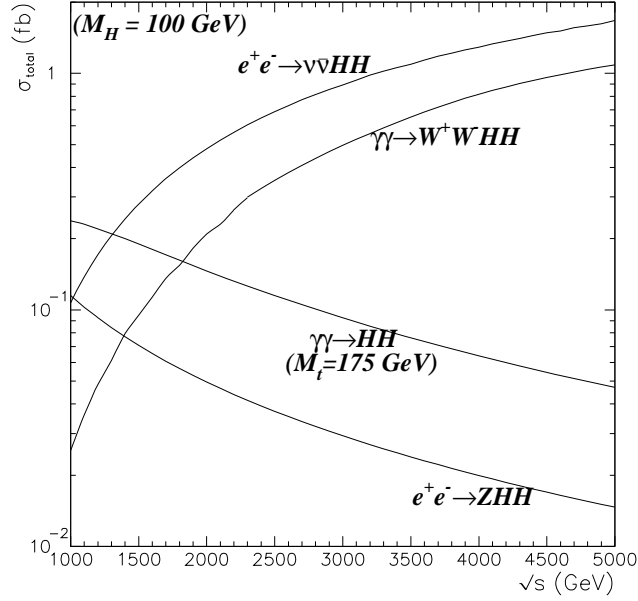
en pointillés, mais les courbes suivantes seront en échelle *log*. En faisant un fit du nouveau résultat avec une droite, on obtient un très bon résultat avec un  $\chi^2$  de environ 0.02 (voir figure), mais c'est un leurre et on verra qu'en fait la dépendance dominante à haute énergie est en  $\log^2(\sqrt{s}/M_W)$ , comportement qui est obtenu grâce à des fonctions de structure simples qui reproduisent assez bien ce qu'on obtient numériquement.

Pour les bosons de Higgs les distributions angulaires sont aussi très piquées près de l'axe du faisceau et si l'on sépare le plus énergétique du moins énergétique (voir fig. 4.10) on voit que le moins énergétique a une distribution beaucoup plus uniforme que l'autre. Le moins énergétique est donc vraisemblablement produit principalement par fusion et le plus énergétique par "Higgs-strahlung". On pourrait envisager d'utiliser ces distributions pour encore améliorer le Monte-Carlo, ce que je n'ai pas fait, estimant que nos résultats étaient assez précis pour nos besoins.

On constate sur ces courbes que le double bremsstrahlung de Higgs sur un  $Z$  est peu intéressant car il décroît avec l'énergie et devient rapidement invisible avec une luminosité intégrée raisonnable de 100 événements par femptobarns. Par contre, les processus  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$  et  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^- HH$  ont une section efficace croissante avec l'énergie (même type de dépendance en  $\sqrt{s}$ ) et commencent à devenir intéressants vers 3 TeV. Le plus intéressant des processus est donc apparemment  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$ . Pour calculer ce processus, on a aussi de gros ennuis numériques du fait que le dénominateur de certains propagateurs peuvent être très petits. Ces ennuis proviennent notamment des propagateurs de  $Z$  dans  $e^+e^- \rightarrow HHZ \rightarrow HH\nu_e \bar{\nu}_e$ . En fait, en calculant séparément  $e^+e^- \rightarrow ZHH$  et en multipliant par le rapport de branchement du  $Z$  en  $\nu_e \bar{\nu}_e$ , on se rend compte que la contribution de ces graphes est négligeable. C'est pourquoi pour l'intégration numérique, nous avons retiré ces graphes parasites qui ne contribuent pas de façon significative à la section efficace. Par contre, nous n'avons pas pu faire le même genre d'approximation simple sur le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^- HH$ , pour lequel nous avons dû conserver tous les graphes. Le résultat final après améliorations numériques peut se lire sur les figures 4.11

**Fig. 4.10:** *Distribution du cosinus de l'angle fait par un Higgs par rapport au faisceau, dans le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .*

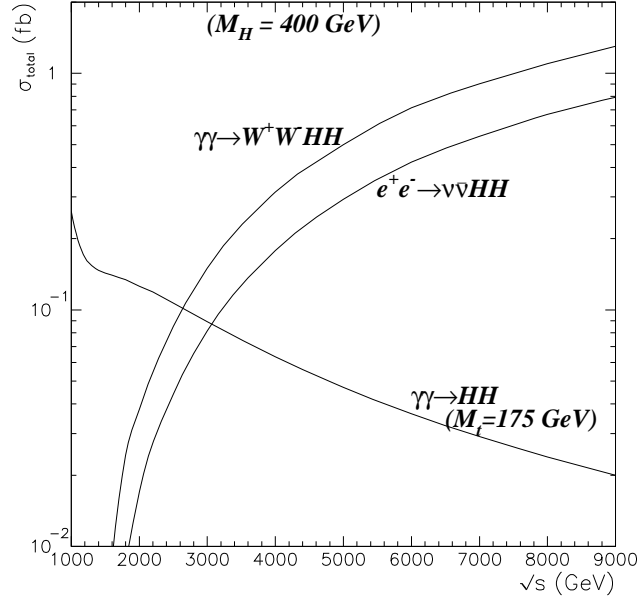


**Fig. 4.11:** *Comparaison des sections efficaces*

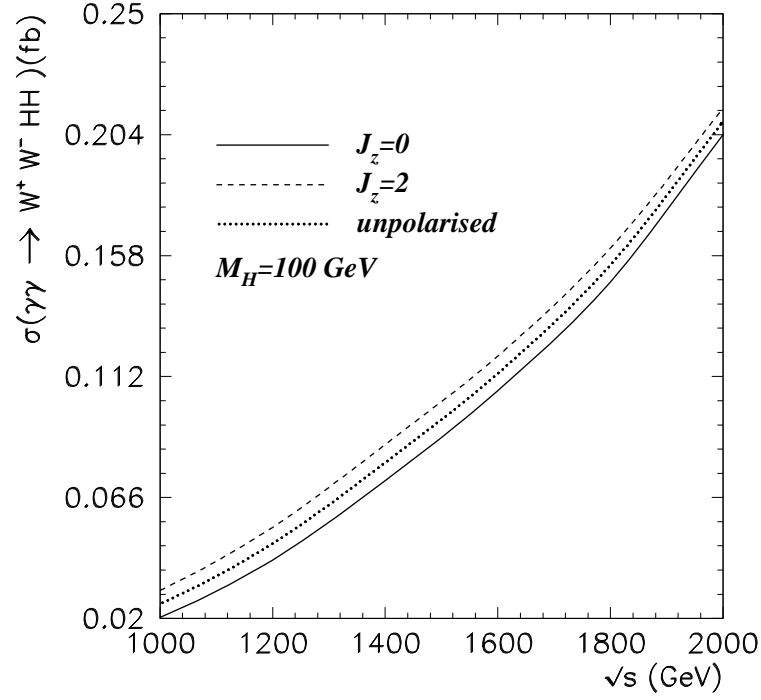
et 4.12.

Pour  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  une approximation grossière est néanmoins possible. Il s'agit de ne considérer uniquement que les graphes dits de fusion de  $W$ , c'est à dire les graphes qui contiennent le processus  $W^+W^- \rightarrow HH$  (graphes de type 1(a), 2, 3 et 11 d'après la classification des figures 4.5 et 4.6). L'intégration se passe alors beaucoup mieux et le résultat donne un bon ordre de grandeur de la section efficace (à un facteur 2 près pour  $M_H = 100 \text{ GeV}$  et à mieux que 20 % près pour  $M_H = 400 \text{ GeV}$ ). Dans cette approximation, on ne considère que des  $W$  sortants transverses (les modes avec un ou deux  $W_L$  sont éliminés). Cette constatation nous amènera plus loin à décrire ce processus (ainsi que  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_eHH$ ) en termes de fonctions de structure (chapitre 7).

L'intérêt essentiel du processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  par rapport à  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_eHH$

**Fig. 4.12:** *Comparaison des sections efficaces*

est que dans notre cas, toutes les particules finales peuvent être expérimentalement reconstruites (aux efficacités près). Les neutrinos eux ne peuvent pas l'être et donc il y a un risque important de mauvaise identification du processus physique à l'origine des deux Higgs (reconstruits eux grâce aux deux jets de quarks  $b$  qu'ils produisent chacun, lorsqu'il s'agit d'un Higgs de masse intermédiaire). D'autres processus possibles ont été étudiés par G.V. Jikia dans [78] comme par exemple  $\gamma\gamma \rightarrow HH$ . Ce processus ne se produit qu'à une boucle, mais néanmoins ce processus est compétitif à basse énergie. Les sections efficaces sont malgré tout petites à ces énergies et on a intérêt à monter en énergie pour profiter des sections efficaces de  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$  et  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^- HH$ . On remarque néanmoins qu'avec un collisionneur à 2 TeV,  $\gamma\gamma \rightarrow HH$  est le meilleur candidat pour un Higgs lourd (figure 4.12). Notons toutefois que ce dernier processus est très sensible à la masse du quark top qui intervient dans les boucles, et on aura besoin d'une mesure précise de cette masse pour faire des prédictions fiables avec  $\gamma\gamma \rightarrow HH$ .

**Fig. 4.13:** *Dépendance en  $J_z$  de la section efficace*

#### 4.4.3 Quelques propriétés de $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$

Regardons maintenant quelques propriétés plus spécifiques du processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ , que nous avons étudié assez en détails. Au niveau spin on voit sur la figure 4.13 que la section efficace dépend peu du spin total entrant le long de l'axe  $[Oz)$  et que l'accord est meilleur à haute énergie. Cela vient du fait qu'à haute énergie les  $W$  sont pratiquement dans l'axe des photons (voir figure 4.8) de sorte que la conservation du spin se fait directement sans faire intervenir de moment cinétique orbital et les observables de spin se découplent alors du processus de collision des photons.

Enfin, si on compare les différents modes finaux, on voit sur la figure 4.14 que la production de  $W$  longitudinaux contribue peu à la section efficace totale. Sur cette

**Fig. 4.14:** Contributions des différents états de polarisation des  $W$ .

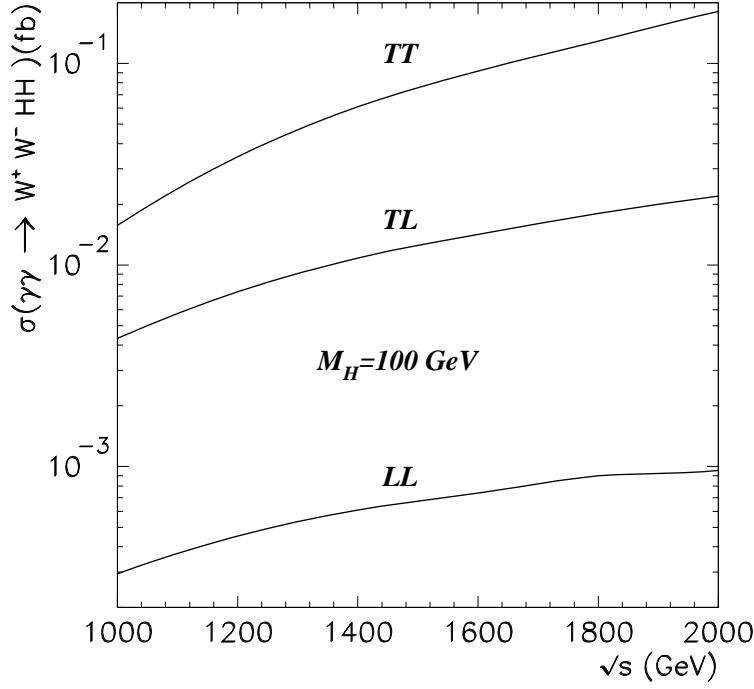


figure on a représenté  $\sigma_{TT}$ ,  $\sigma_{TL}$  et  $\sigma_{LL}$  pour  $Jz = 0$ . On retrouve bien les résultats obtenus précédemment pour le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ . On s'attend en effet à ce que les deux Higgs (sans spin) que l'on rajoute modifient peu la structure des résultats.

Les distributions d'énergie des  $W$  sont indiquées sur la figure 4.15. On constate que lorsque l'espace de phase est assez large  $\sqrt{s} \gg 2M_H + 2M_W$ , la distinction de comportement est nette entre les  $W$  longitudinaux et les transverses. Ces derniers ont en effet tendance à emporter le plus d'énergie possible (énergie maximale =  $\sqrt{s}/2 - M_H$ ). Les longitudinaux sont eux presque assimilables à des particules scalaires ce qui fait que leur distribution angulaire est moins piquée autour des petits angles comme c'est le cas pour les transverses. Un  $W$  longitudinal ne pouvant emporter le moment cinétique du photon incident, le processus cherche à compenser avec du



moment cinétique orbital et donc des diffusions à grand angle. Et qualitativement, à grand angle on s'attend à ce que ce  $W$  soit moins énergétique. C'est le  $W$  virtuel (celui qui intervient dans le mécanisme de fusion de  $W$ , voir graphe 2 figure 4.5) qui emporte alors plus d'énergie (comme il se couple a des bosons de Higgs, il sera alors favorisé quand la cinématique lui permet d'être énergétique).

#### 4.4.4 Nouveaux résultats incluant les spectres de photons

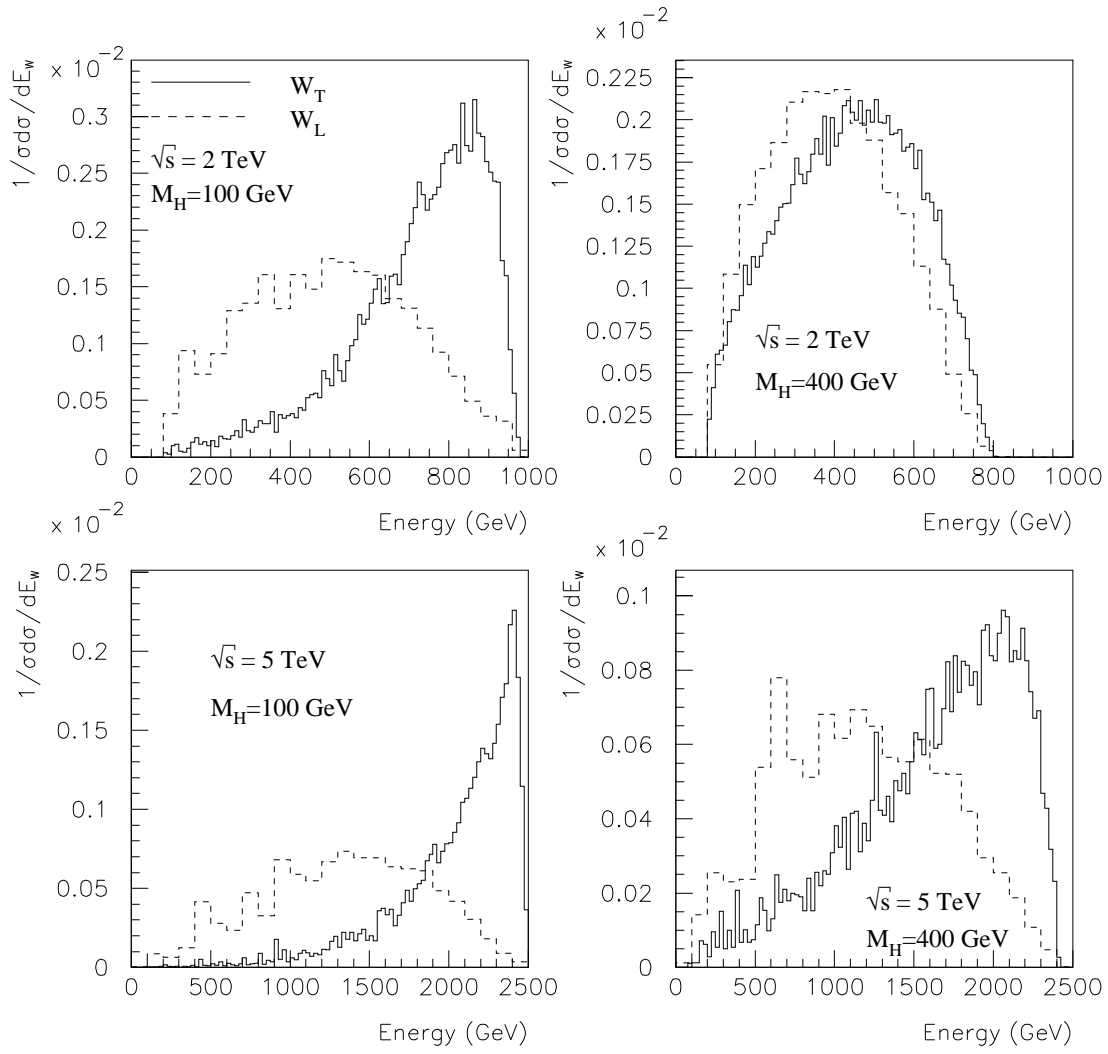
Après convolution, on se rend compte que les distributions changent peu. Seule la section efficace totale devient plus faible. Pour le projet de collisionneur NLC qui pourrait être poussé à 2 TeV en énergie, la section efficace totale de  $e_L^- e_L^+ \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow W^+ W^- H H$  vaut 0.116 fb au lieu de 0.21 sans inclure le spectre. Notons qu'ici nous nous sommes placés dans le meilleur des cas où les lasers sont polarisés droits et les électrons gauches ce qui donne le spectre le plus piqué sur les hautes énergies. Entre 1 et 2 TeV on a les courbes de la figure 4.16 sur lesquelles on peut voir que même dans la meilleure configuration de polarisation, on atteint à peine le dixième de femptobarns. Et comme avant convolution, les  $W$  longitudinaux sortant contribuent peu comme on le voit sur la figure 4.17.

### 4.5 Le couplage $H^3$

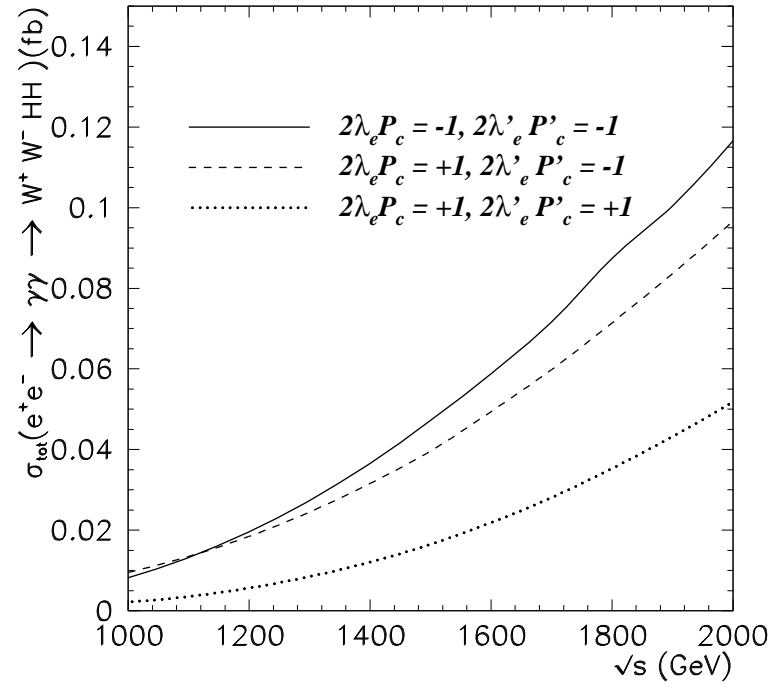
Maintenant regardons plus en détails comment mesurer le couplage  $H^3$ . Pour cela on introduit un facteur d'échelle  $h_3$  sur le vertex  $H^3$  de façon à ce que  $h_3 = 1$  corresponde au Modèle Standard (voir figure 4.18).

La section efficace différentielle s'écrit alors :

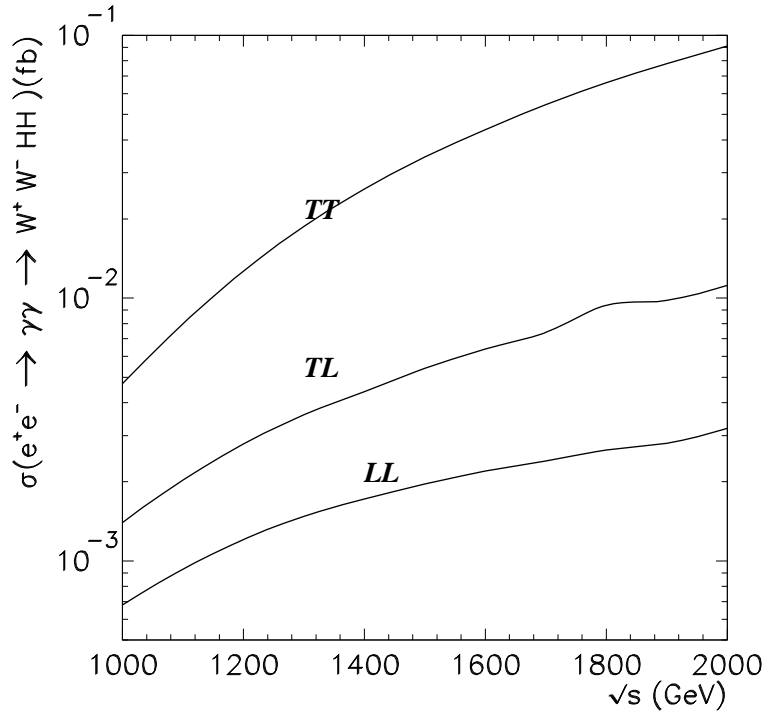
**Fig. 4.15:** *Densité d'énergie des  $W$  sortant.*



**Fig. 4.16:** Sections efficaces de  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .  $\lambda_e, \lambda'_e$  sont respectivement les polarisations de l'électron et du positron,  $P_c$  et  $P'_c$  sont les degrés de polarisation circulaire des lasers.



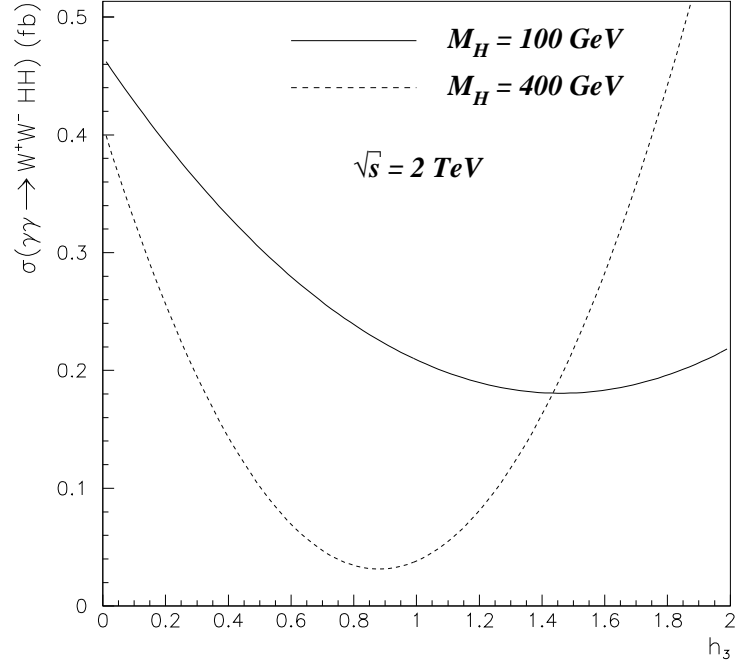
**Fig. 4.17:** Contributions des différents états de polarisation finale en incluant les spectres de photons polarisés



**Fig. 4.18:** Définition du couplage anormal  $h_3$ .

$$\begin{array}{c} \text{H} \\ \text{H} \end{array} \begin{array}{c} \text{H} \\ \text{H} \end{array} = h_3 \times -\frac{3igM_H^2}{2M_W}$$

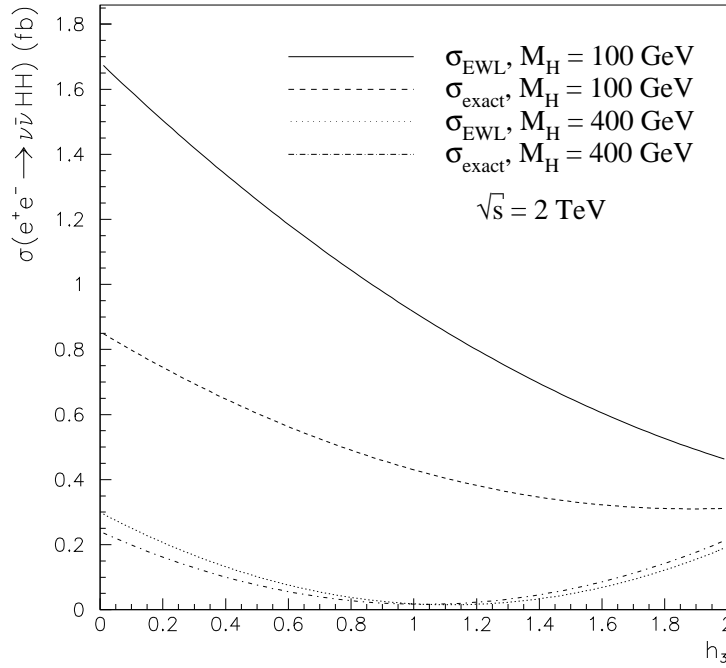
**Fig. 4.19:** Dépendance dans le couplage anormal  $H^3$  de la section efficace de  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .



$$d\sigma = d\sigma_{bgd} + h_3 d\sigma_{interf} + h_3^2 d\sigma_{signal} \quad (4.19)$$

La partie signal représente le sous groupe invariant de jauge  $H^3$ , et le reste des graphes forme le “bruit de fond”. Un tel facteur d’échelle pourrait être différent de 1 pour un potentiel de brisure de symétrie non minimal. Le premier terme d’ordre supérieur apporte une correction au vertex  $H^3$  qui induit un facteur  $h_3$  différent de 1. La valeur 1 du paramètre  $h_3$  correspond au Modèle Standard (voir eq. (4.3)). Si on regarde l’évolution de la section efficace totale en fonction du paramètre d’échelle on obtient la figure 4.19. On constate sur cette figure que pour une mesure autour de  $h_3 = 1$ , la section efficace est nettement plus sensible pour un Higgs léger que pour un Higgs lourd, ce que l’on retrouve aussi dans le mode  $e^+e^-$ .

**Fig. 4.20:** *Dépendance de la section efficace dans le couplage anormal  $H^3$ . EWL signifie ici qu'on a utilisé l'approximation du  $W$  longitudinal équivalent pour approximer la section efficace (utilisation de la fonction de structure (5.16) qui donne la luminosité (7.10))*



Pour le processus  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$  on a en effet le même comportement (voir fig. 4.20) et il est bien reproduit par les approximations des  $W_L$  effectifs que nous traiterons plus loin.

On constate alors qu'une mesure directe de  $h_3$  est possible mais difficile. En effet, les courbes atteignent un minimum puis remontent, du fait que  $\sigma$  est quadratique en  $h_3$  (voir fig. 4.19 et fig. 4.20). On peut donc s'attendre à deux valeurs de  $h_3$  pour une même valeur de  $\sigma$ , et la mesure de  $h_3$  est évidemment plus difficile si on est au voisinage du minimum. Ajoutons à cette difficulté le fait que nous ne pouvons pas encore anticiper sur la masse du Higgs et que suivant le domaine de masse considéré, la mesure est plus ou moins simple. Pour cela, sur les figures 4.21 on a

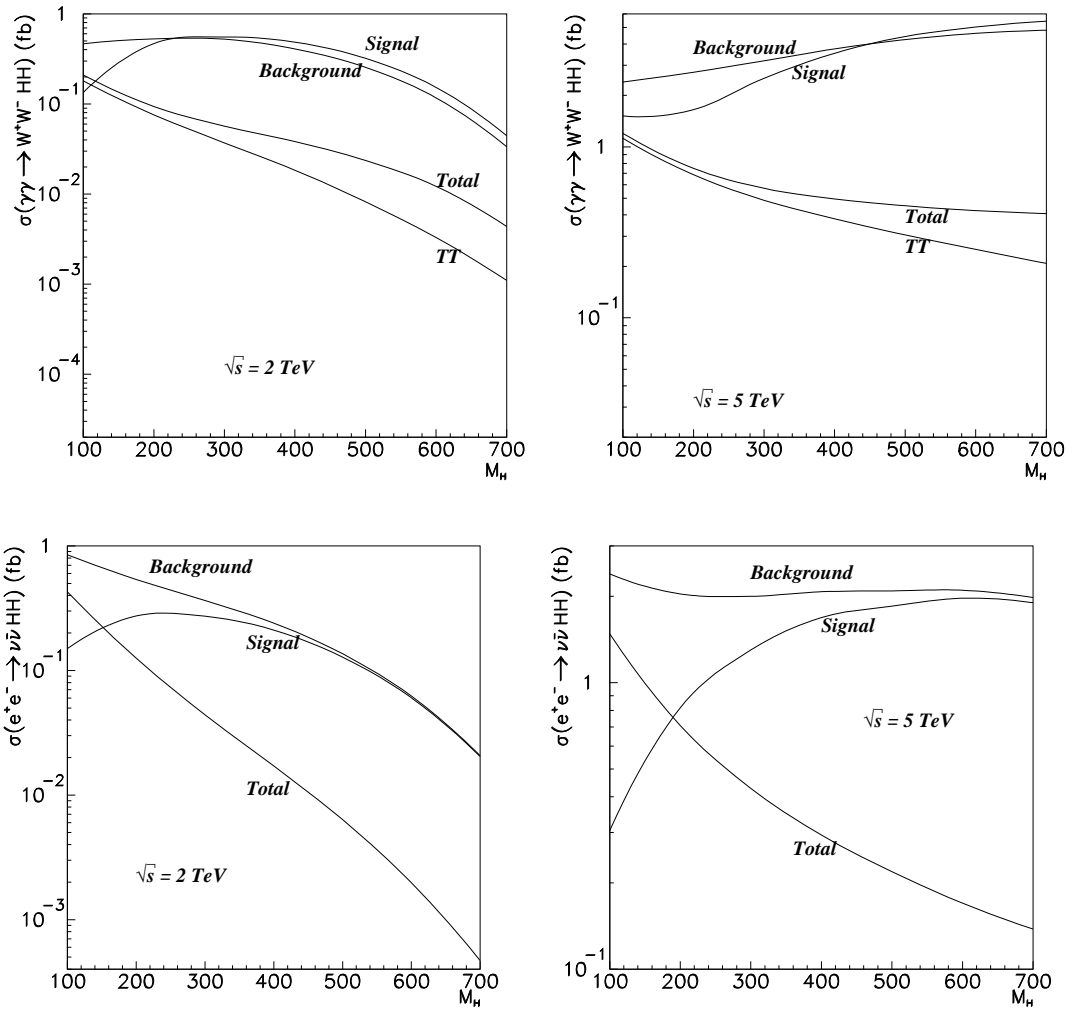
représenté les différentes contributions à la section efficace en fonction de  $M_H$  (et en supposant un couplage standard  $h_3 = 1$ ). Il est visible sur ces figures que les termes d'interférences sont très destructifs tant la section efficace totale est petite par rapport à celle du “bruit de fond”. Comme on s’y attend, la section efficace totale décroît avec  $M_H$  à cause de l’espace de phase disponible qui se réduit au fur et à mesure. Par conséquent, si le Higgs s’avèrait lourd, on ne pourrait pas espérer avoir beaucoup d’événements dans les expériences. Il y a néanmoins un effet bénéfique qui est la dépendance quadratique en  $M_H$  du couplage à trois Higgs. Ainsi, tant que l’espace des phases n’est pas trop réduit, la partie “signal” augmente rapidement avec  $M_H$ , et il est alors plus facile de discriminer entre le “bruit de fond” et le “signal”.

#### 4.5.1 Une observable intéressante

Les sections efficaces qui sont attendues pour  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  et même  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_eHH$  sont faibles et il nous semble extrêmement difficile de réaliser une mesure convenable de  $h_3$  à l’aide de la simple mesure de la section efficace de ces processus. C’est pourquoi nous avons recherché des distributions dans lesquelles la discrimination signal/bruit serait plus facile. Nous avons alors trouvé que la distribution dans l’angle  $\Theta_{H_1H_2}^*$  (défini par la figure 4.22) est un bon moyen d’y arriver.

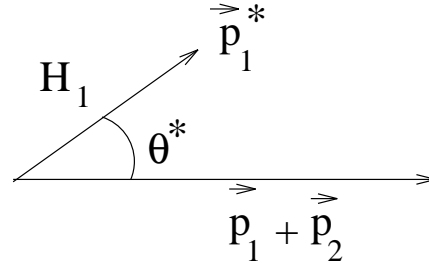
Pour définir l’angle  $\Theta_{H_1H_2}^*$ , on se place dans le référentiel du système  $H_1H_2$  et on prend comme direction de référence  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ , c’est à dire la somme des impulsions des Higgs prises dans le référentiel du laboratoire. Si la paire de Higgs est produite à partir d’un seul autre Higgs (ce que nous appelons “signal”), on s’attend à ce que dans le référentiel propre de ce Higgs initial il n’y ait pas de direction privilégiée de production pour les deux Higgs finaux qui sont produits par une particule scalaire. La distribution en  $\cos(\Theta^*)$  est en fait convexe comme on le voit sur la figure 4.23.

**Fig. 4.21:** Dépendance de la section efficace des deux processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  et  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$  en fonction de  $M_H$ .

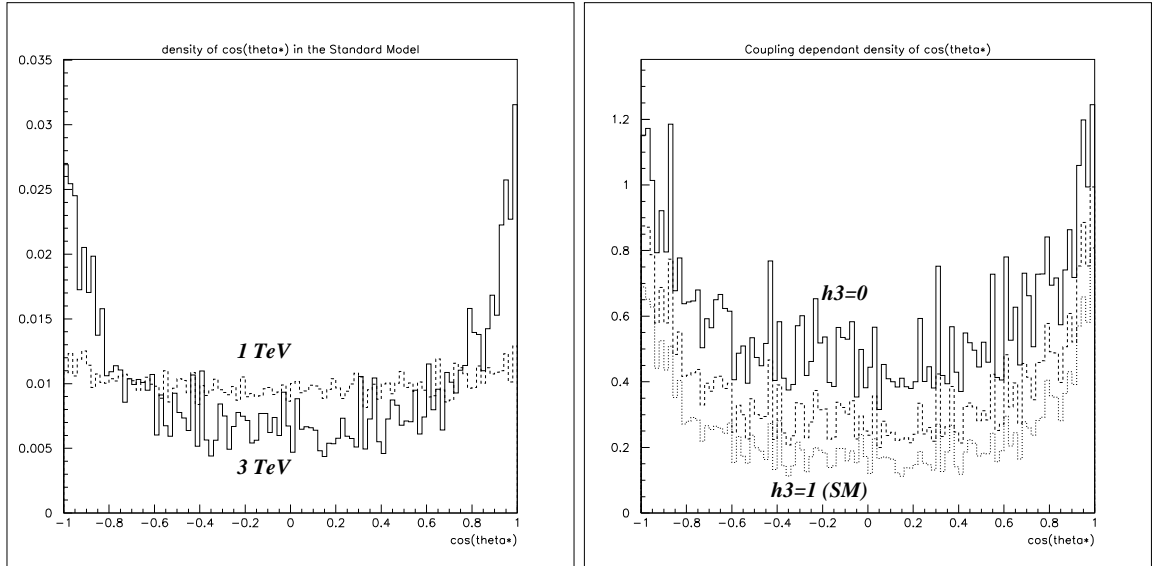




**Fig. 4.22:** Définition première de  $\Theta^*$ .



**Fig. 4.23:** Distribution en  $\cos(\Theta^*)$  dans  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ . A gauche les distributions pour  $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$  et  $\sqrt{s} = 3 \text{ TeV}$ . A droite on a  $\sqrt{s} = 3 \text{ TeV}$  mais le couplage anormal  $h_3$  prend respectivement les valeurs 0, 0.5 et 1.



La première figure donne l’allure de la courbe pour des énergies de 1 et 3 TeV. Sur la deuxième figure sont représentées plusieurs de ces courbes pour des valeurs différentes de  $h_3$  (0, 0.5 et 1) et  $\sqrt{s} = 3$  TeV. Cette distribution est intéressante car si on représente la seule contribution de la partie “signal” à cette distribution, on se rend compte que celle-ci est plate, ce que l’on a expliqué juste avant. La courbure de cette distribution est donc due essentiellement au “bruit de fond” (graphes de double bremsstrahlung) et des interférences, ce qui permet de “fiter” plus facilement la valeur de  $h_3$  en utilisant par exemple un polynôme pair en  $\cos(\Theta^*)$ . En fait, cette distribution présente une difficulté qui est que, à haute énergie, les 2 Higgs sont pratiquement d’impulsion opposées et de même module, ce qui fait que leur somme est quasiment nulle ce qui rend assez instable numériquement la direction de référence. On peut néanmoins prendre l’axe du faisceaux comme référence et ce nouvel angle (que nous nommerons de la même façon par abus de langage) doit avoir des propriétés similaires. Les distributions associées sont montrées sur la figure 4.24.

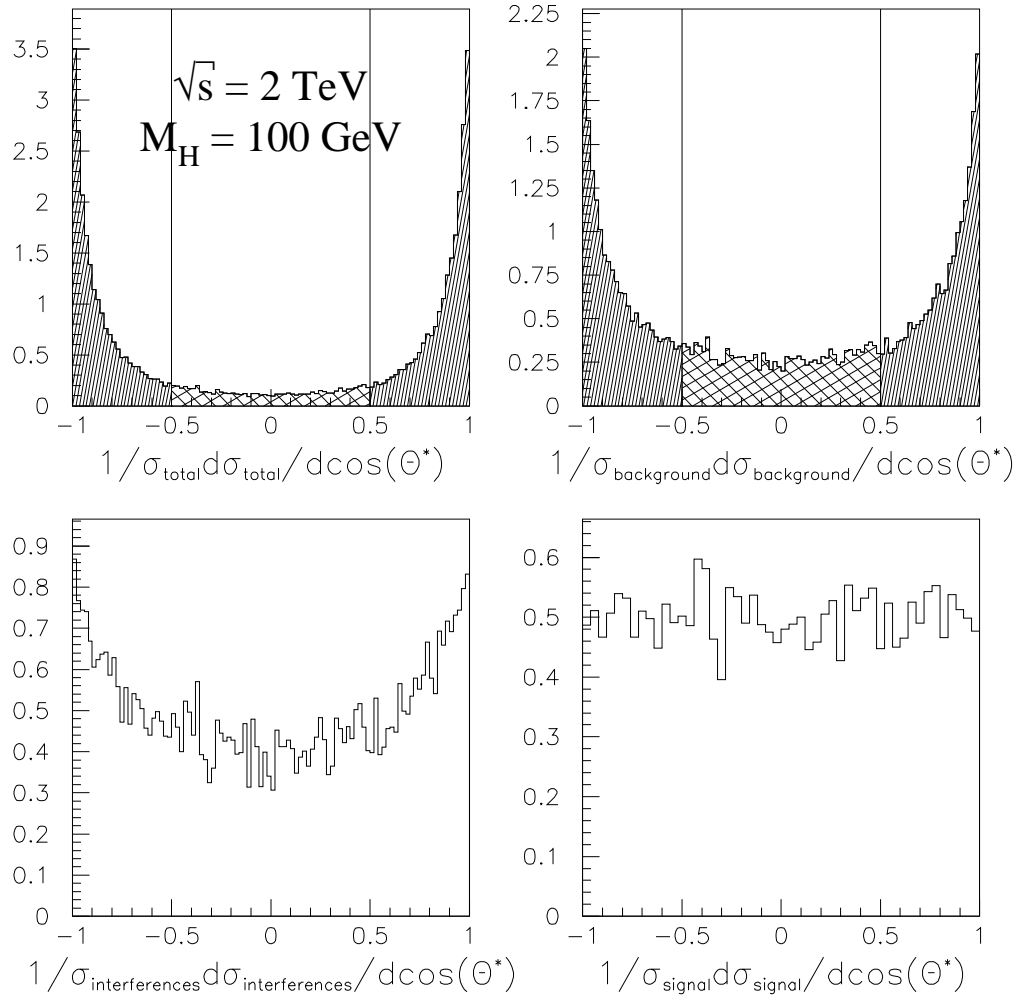
Avec cette distribution, le rapport signal sur bruit aux extrémités  $-1$  et  $1$  est plus mauvais qu’avec l’observable précédente. Mais de toutes façons, comme la statistique attendue est de l’ordre de moins de 100 événements sur plusieurs années, il paraît difficile d’espérer mesurer  $h_3$  à mieux que 10% près. Regardons cela plus en détail. Nous prenons ici comme luminosité intégrée de 300 événements par femptobarns<sup>(2)</sup>. Notons ici que la statistique dans le mode  $e^+e^-$  peut être multipliée par 4 si on dispose de faisceaux polarisés d’électrons. On supposera aussi que l’efficacité de reconstruction des événements à deux Higgs est de l’ordre de 50%. Si on recherche des événements comprenant 4 jets de  $b$  et beaucoup d’énergie manquante on peut ainsi obtenir la contribution du processus  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$ , et nous obtenons pour  $\sqrt{s} = 2$  TeV et  $M_H = 100$  GeV environ 68 événements reconstruits. Dans la reconstruction des événements, nous avons supposé que le bruit de fond en  $\nu_e \bar{\nu}_e ZZ$  (ou  $\nu_e \bar{\nu}_e W^+W^-$  sans l’identification du  $b$ ) peut être éliminé<sup>(3)</sup>. Dans ces conditions,

---

<sup>(2)</sup>Voir P. M. Zerwas dans les proceedings du workshop Annecy-Gran Sasso-Hamburg intitulé “LC2000: Physics with  $e^+e^-$  linear colliders” (1995).

<sup>(3)</sup>Pour  $M_H = 100$  GeV les masses invariantes des jets sont facilement identifiables avec celle d’un  $Z$ , mais la différence de spin entre le Higgs et le  $Z$  peut sans doute donner des distributions

**Fig. 4.24:** *Distribution en  $\cos(\Theta^*)$  avec  $\Theta^*$  considéré par référence à l'axe  $[Oz]$ , pour le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .*



si on exige un minimum de 30 événements et une déviation minimale de 50% dans le nombre d'événements attendus, on peut exclure le Modèle standard si  $h_3 < 0.25$  ou  $h_3 > 3$  en utilisant les résultats de la figure 4.20. Dans le cas d'un Higgs lourd ( $M_H = 400 \text{ GeV}$ ), on ne devrait voir aucun événement si  $h_3 = 1$ , mais quelques événements peuvent apparaître pour  $\delta h_3 > 1$ . Les limites obtenues sont donc très larges mais peuvent être améliorées en utilisant le rapport  $R$  (4.20). Nous avons utilisé la distribution en  $\cos(\Theta^*)$  en incluant pour le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  les spectres des photons. La distribution a en fait les mêmes propriétés que si l'on n'avait pas inclu les spectres. De sorte que si on calcule le rapport  $R$  du nombre d'événements pour lesquels le cosinus est inférieur en valeur absolue à 0.5, et du nombre d'événements pour lesquels le cosinus est supérieur à 0.5, cette quantité varie en fonction du couplage  $H^3$  ce qui est représenté sur la figure 4.25. Le rapport  $R$  est assez peu sensible à une variation de la limite  $\cos(\Theta_0^*) = 0.5$  et nous n'avons pas cherché de ce fait à optimiser cette valeur.

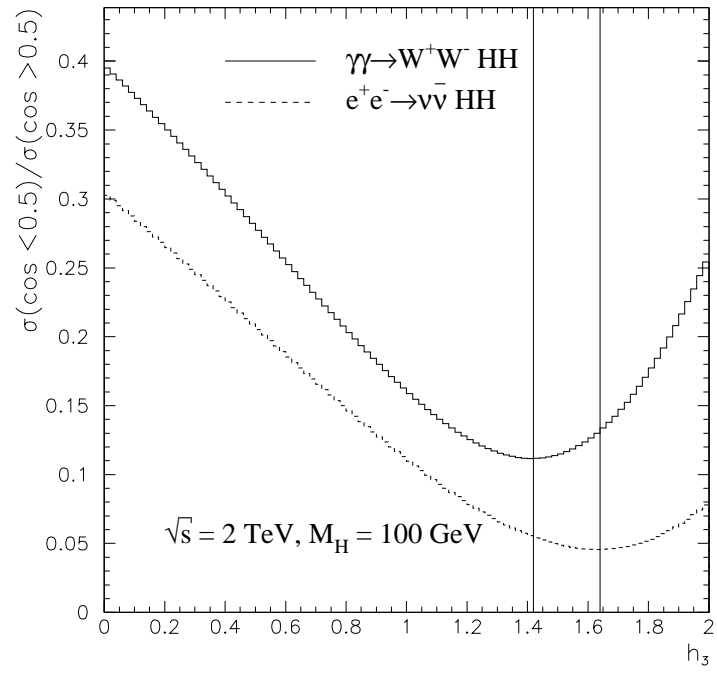
$$R = \frac{\sigma_{HH}(|\cos \Theta^*| < |\cos \Theta_0^*|)}{\sigma_{HH}(|\cos \Theta^*| > |\cos \Theta_0^*|)} \quad (4.20)$$

La précision que l'on est susceptible d'obtenir pour une mesure de ce couplage est en fait bien meilleure que si l'on s'était contenté de regarder les variations de la section efficace, comme le font Ilyin et al. dans [81]. En effet, pour  $M_H = 100 \text{ GeV}$ , le numérateur de  $R$  contient environ 7 événements pour 60 au dénominateur (pour  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$ ). Ce rapport présente l'avantage de ne pas être tellement influencé par des erreurs systématiques dans la mesure des sections efficaces (problèmes de calibration ...), et nous avons pris comme base de travail que ce rapport pourrait être mesuré à 20% près. Dans cette situation, on peut réaliser une mesure de  $h_3$  ( $h_3$  voisin de 1) à  $\pm 10\%$  près dans  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$ . Dans le mode  $\gamma\gamma$ , il faut compter que l'on perd environ moitié des événements lorsqu'on prend en compte les spectres de photons. On s'attend pour  $M_H = 100 \text{ GeV}$  à en obtenir environ

---

angulaires différentes pour les jets (voir effet Collins [79, 80]).

**Fig. 4.25:** *Evolution de  $R$  en fonction du couplage anormal*



15, et le critère de mesure est donc plus sévère (100% de déviation). Dans ce mode le résultat est un peu meilleur que les limites extraites à partir de la seule section efficace de  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$ , mais néanmoins le meilleur résultat est obtenu en étudiant le rapport  $R$  dans le même mode  $e^+e^-$ . Par contre, le mode  $\gamma\gamma$  devient intéressant dans le cas d'un Higgs de  $400\text{ GeV}$  où les limites que l'on peut obtenir sont  $-0.7 < \delta h_3 < 0.5$ . Il y a donc une certaine complémentarité entre le mode  $e^+e^-$  et le mode  $\gamma\gamma$  pour un collisionneur à  $2\text{ TeV}$ . Pour finir cette analyse, notons que le processus à une boucle  $\gamma\gamma \rightarrow HH$  ne permet pas de donner de limites utiles en dehors d'un Higgs très lourd  $M_H > 600\text{ GeV}$ . Pour un Higgs plus léger, ce processus n'est pas sensible au canal  $J_z = 0$ , canal qui nous intéresse pour la désintégration d'un Higgs en deux autres Higgs.

#### 4.5.2 En résumé

Dans ces premiers travaux, on a montré que le couplage  $H^3$  pourrait être raisonnablement mesurable dans une machine  $e^+e^-$  convertible en photons-photons à très haute énergie. Etant donné l'arbitraire qui règne encore dans le secteur de Higgs, il est difficile d'anticiper plus sur les possibilités de reconstruire le potentiel de Higgs. Nous avons vu que des limites raisonnables peuvent être données, mais qu'il ne faut pas beaucoup espérer atteindre la précision du pour-cent sur ces mesures. Ajoutons enfin qu'après que nous ayons effectué cette étude, d'autres collaborations se sont intéressées à ce sujet, confirmant nos résultats [81, 82].

Pour réaliser toutes ces mesures il nous a fallu calculer des amplitudes de processus très compliqués et nous avons montré aussi à quel point nous atteignons facilement les limites de nos machines informatiques pour ce type de calcul. C'est d'autant plus frustrant que dans  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$  comme dans  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^- HH$ , la cinématique semble nous indiquer que les graphes de fusion de  $W$  donnent une contribution largement dominante à la section efficace. Pour vérifier cette idée, nous

avons fait appel au formalisme des fonction de structure, et en particulier nous avons utilisé des résultats préliminaires simples [73], et développé de nouvelles fonctions de structure légèrement améliorées. Pour ne pas brusquer les étapes, je vais dans un premier temps rappeler les notions fondamentales relatives aux fonctions de structure dans le chapitre suivant.





# Chapitre 5

## Améliorations des fonctions de structure

### 5.1 Considérations générales

#### 5.1.1 La sélection de graphes de Feynman

Dans le chapitre précédent nous avons montré que pour certains processus que nous avons étudiés,  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$  et  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ , des instabilités numériques apparaissent à haute énergie, dues au fait que des propagateurs dans certains graphes présentent des pics très étroits dans l'espace de phase. Ces graphes deviennent donc apparemment dominants à haute énergie et la question qui se pose alors est de savoir si ces graphes seuls permettent de décrire assez bien la physique contenue dans ces processus. Les graphes concernés sont des graphes de fusion de  $W$  et on est tenté d'interpréter ce phénomène en disant qu'à haute énergie, les particules incidentes “rayonnent” des  $W$  qui ensuite fusionnent pour donner une paire de Higgs (pour

les processus précédents), ou d'autres particules. Cette interprétation est la base du formalisme des fonctions de structure que je compte décrire dans ce chapitre, parce qu'il nous a été utile dans l'étude des processus précédents, et que nous l'avons par la suite approfondi.

La notion de fonction de structure part d'une remarque très générale sur les amplitudes de diffusion : en effet, celles-ci sont des fractions rationnelles dans les coordonnées des impulsions externes, et leur dénominateur peut devenir très petit, voire peut s'annuler, dans certaines régions de l'espace de phase. Dans ce dernier cas on a des divergences colinéaires ou infrarouges qui sont le signe d'un domaine où les calculs perturbatifs cessent d'être valides et où on doit resommer des contributions à tous les ordres pour obtenir un résultat fini. Un exemple simple de ce genre de situation est réalisé par le processus  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  qui possède une telle divergence lorsque l'angle de diffusion est nul. Comme notre objectif est ici de rester dans le cadre du domaine perturbatif, nous ne nous intéresserons qu'aux situations où certains dénominateurs de propagateurs sont petits mais non nuls, régularisés par un terme de masse. Lorsque l'énergie mise en jeu dans les processus devient très grande devant ces échelles de masse qui régularisent les propagateurs<sup>(1)</sup>, certains propagateurs vont apporter une contribution dominante à la section efficace. Comme ce comportement ne concerne en général que très peu de graphes de Feynman parmi tous ceux nécessaires au calcul de l'amplitude, l'intuition peut conduire à brutalement réduire le calcul de l'amplitude aux seuls graphes qui contiennent la singularité intéressante. Nous avons constaté ce phénomène sur les processus  $e^+ e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e H H$  et  $\gamma \gamma \rightarrow W^+ W^- H H$  dans lesquels les graphes de fusion de  $W$  semblent dominants à première vue. Nous en avons déduit que probablement dans ces processus, tout se passe comme si on pouvait scinder en plusieurs morceaux la probabilité de transition, en disant qu'on a une certaine probabilité que les particules initiales se désintègrent en une particule sortante et une particule interne, pratiquement sur couche de masse, et que ces particules internes fusionnent dans un sous processus dont la probabilité de se produire sera donnée par sa section efficace. Nous cherchons en quelque sorte

---

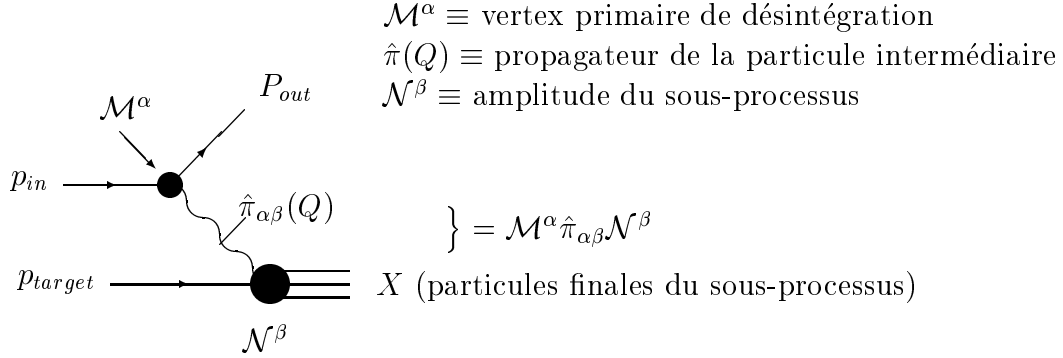
<sup>(1)</sup>C'est la définition de "limite de haute énergie" dans cette thèse.

à exprimer la probabilité de transition comme suit :

$$\sigma_{processus\ complet} = \int d\tau D(\tau) \sigma_{sous-processus}(\tau) \quad (5.1)$$

où  $\tau$  est une variable cinématique qui décrit entièrement la configuration de la première désintégration, et  $D(\tau)$  la probabilité qu'a cette désintégration de se produire. Nous comptons donc dans la problématique des prochains chapitres chercher les fonctions  $D$  pour certains types de désintégrations (elles ne doivent pas dépendre du sous processus si on veut qu'elles soient universelles), puis tester justement leur universalité sur un certain nombre de processus, dont en particulier ceux que je viens de mentionner ( $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$  et  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^- HH$ ). Pour dériver ces fonctions de structure, nous allons devoir imaginer un processus générique dont la partie dominante à haute énergie peut se ramener par exemple à une série de graphes que l'on pourrait noter graphiquement par la figure 5.1. Notons que dans un premier temps, pour jeter les bases de notre formalisme nous ne considérerons que la désintégration d'une seule des particules initiales (pour simplifier). Cette figure 5.1 représente le graphe qui, nous le supposons, domine à haute énergie. Nous allons donc ensuite tenter de scinder cette amplitude en deux parties (obtenues respectivement à partir des contributions de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ ). En prenant le module de l'amplitude au carré, chacune de ces deux parties sera alors interprétée comme une probabilité. C'est une démarche ambitieuse car la mécanique quantique interdit *a priori* de scinder une probabilité de transition en un produit (ou une somme de produits) de deux probabilités (à cause des interférences). Nous cherchons donc à obtenir ce genre de décomposition de façon approximative. La probabilité que nous calculerons à partir de l'amplitude  $\mathcal{M}$  (voir figure 5.1) sera notée  $D$  dans la suite (comme dans l'équation (5.1)) et c'est cette fonction que nous appellerons fonction de structure.

L'opération de sélection d'un ou plusieurs graphes dans un processus n'est pas anodine et pose des problèmes sérieux dès lors qu'on veut garder un sens physique

**Fig. 5.1:** Décomposition de l'amplitude dans ses éléments dominants

aux graphes que l'on conserve, et *a fortiori* à l'équation (5.1). A ce stade en effet, nous nous bornons à une constatation numérique, qui est que parmi tous les graphes calculés, certains vont contribuer plus que d'autres. Mais déjà à ce niveau les difficultés concernant l'invariance de jauge apparaissent. En effet, une idée fausse que l'on pourrait avoir dans un premier temps consiste à s'affranchir de cette difficulté en déclarant que la méthode fonctionne dans une jauge définitivement fixée. Mais malheureusement, dès que l'on sélectionne un graphe particulier (et surtout s'il contient des vertex non-abélien) ce raisonnement ne tient plus parce que très souvent, les graphes ont séparément des comportements en énergie catastrophiques (leur amplitude varie suivant une trop grande puissance de l'énergie  $\sqrt{s}$ , voir par exemple [83]). Il pourrait donc y avoir violation de l'unitarité comme il a été rappelé dans l'introduction de cette thèse, et l'invariance de jauge garanti en fait que de subtiles compensations doivent apparaître entre tous les graphes pour obtenir un résultat global qui n'augmente pas trop vite avec l'énergie. Par conséquent, considérer seulement un sous ensemble de graphes ne suffit pas s'ils ne forment pas un sous-ensemble invariant de jauge. Si ces graphes divergent trop vite avec  $\sqrt{s}$ , il faudra en extraire certains termes, de façon à éliminer ces divergences ultraviolettes.

lettres. C'est pour cela que dans la dérivation des fonctions de structure, nous avons choisi une jauge non-linéaire susceptible d'avoir un relativement bon comportement à haute énergie.

La deuxième difficulté qui apparaît c'est l'invariance de Lorentz<sup>(2)</sup>. L'hélicité d'une particule n'est pas en effet invariante par transformation de Lorentz. Et si l'on tient absolument à conserver l'hélicité comme invariante par changement de référentiel (au sein d'un processus physique), il est nécessaire que l'amplitude de transition associée à ce processus soit invariante de jauge. Si en effet on considère la polarisation  $\varepsilon_{(\lambda)}^\mu$  d'un photon par exemple, avec l'hélicité  $\lambda$  et qu'on opère dessus une transformation de Lorentz  $\Lambda_\mu^\nu$  appartenant au petit groupe de Poincaré associé au photon, on obtient :

$$\Lambda_\mu^\nu \varepsilon_{(\lambda)}^\mu(k) = \omega \varepsilon_{(\lambda)}^\nu(k) + C \cdot k^\nu \quad (5.2)$$

où  $C$  et  $\omega$  sont des constantes ( $\omega$  est une phase). Dans ce cas, le terme proportionnel à  $k^\nu$  doit disparaître dans une amplitude physique, ce qui implique que si l'on écrit l'amplitude sous la forme  $\varepsilon^\mu \mathcal{M}_\mu$ , on doit avoir  $k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$ . Notons qu'on retrouve la condition d'invariance de jauge dans le photon grâce à l'invariance de Lorentz. Cela étant, si l'on se cantonne à un référentiel bien particulier et figé, il n'y a pas d'effet secondaire néfaste comme précédemment pour l'invariance de jauge dans les couplages non-abéliens. Ce choix de référentiel est d'ailleurs couramment employé en QCD avec le repère de "moment infini" utilisé pour étudier des diffusions profondément inélastiques. Fixons nous pour le moment comme référentiel le centre de masse des particules initiales, et nous verrons à la fin de cette section (après avoir dérivé des fonctions de structure explicites) quelques indices (en cours

---

<sup>(2)</sup> Cette difficulté est ici inévitable si l'on s'intéresse à la désintégration d'un photon par exemple, car celui-ci ne peut pas engendrer deux particules massives réelles. Si on décide néanmoins d'assimiler les deux particules produites à des particules réelles, alors il est raisonnable d'exiger que l'énergie du photon soit plus grande que la somme des masses produites, et pour cela il nous faut de toute façon choisir un référentiel.

de développement) pour obtenir des résultats invariants de jauge. Les chapitres suivants sont destinées à montrer les résultats de tests que j'ai effectué sur ces fonctions et à une discussion sur leur domaine de validité.

Cette étude, rappelons le, a été menée à partir de celle sur le couplage à trois Higgs dans laquelle nous avons remarqué que les graphes de fusion de  $W$  semblaient devoir être dominants. C'est pour cette raison que dans ce chapitre et les suivants nous chercherons principalement la probabilité qu'un photon se désintègre en deux  $W$ , et en distinguant les différents modes de polarisation possibles pour les  $W$ . Contrairement au cas où ce  $W$  est issu d'un quark ou d'un électron, le cas du photon incident a été peu étudié. Pour le photon, des problèmes d'invariance de jauge apparaissent de façon plus cruciale que lorsqu'on a un fermion incident et un fermion sortant. Pour les fermions en effet on a pratiquement un courant conservé, autrement dit l'identité de Ward  $\mathcal{M}^\alpha Q_\alpha = 0$  (voir figure 5.1) est quasiment vérifiée, ce qui permet d'éliminer le terme proportionnel à  $Q^\mu Q^\nu / M_W^2$  dans le propagateur du  $W$  (qui dépend de la jauge).

### 5.1.2 Principe de décomposition de l'amplitude

Maintenant que nous avons défini l'objectif à atteindre, reprenons pour y arriver la définition de la section efficace totale d'un processus tel que celui de la figure 5.1 qui s'écrit<sup>(3)</sup> :

$$\begin{aligned} d\sigma_{tot} &= \frac{1}{4(p_{in} \cdot p_{target})} |\mathcal{M}_{tot}|^2 \frac{d\vec{P}_{out}}{2P_{out}^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(\sum_f p_f - p_{in} - p_{target}) \prod_{f \in X} d\tilde{p}_f \\ &= \frac{1}{4(p_{in} \cdot p_{target})} \frac{|\mathcal{M}^\mu \mathcal{N}_\mu|^2}{(Q^2 - M_W^2)^2} \frac{d\vec{P}_{out}}{2P_{out}^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(\sum_f p_f - p_{in} - p_{target}) \prod_{f \in X} d\tilde{p}_f \end{aligned}$$

---

<sup>(3)</sup>  $d\tilde{p}_f = \frac{d^3 \vec{p}_f}{2E_f (2\pi)^3}$  et  $f \in X$  signifie que  $f$  est une particule issue du sous-processus.

(5.3)

$p_{in}$  et  $p_{target}$  désignent ici les impulsions de chaque faisceau. Implicitement, la terminologie signifie que seule la désintégration de la particule d'impulsion  $p_{in}$  sera prise en compte par une fonction de structure, l'autre faisant partie du sous-processus. Dans un deuxième temps on étudiera le cas où les deux faisceaux incidents donnent lieu à une désintégration primaire, dont le produit déclenche un sous-processus. Dans ce cas la cinématique est plus complexe, c'est pourquoi je préfère ici considérer d'abord le problème le plus simple. Pour séparer en deux l'amplitude, et obtenir d'un côté la contribution du vertex initial (qui va être identifié à la fonction de structure), et d'un autre côté la contribution du sous-processus, nous allons re-exprimer le tenseur du propagateur comme une somme de produits tensoriels de polarisations. Bien entendu, cette décomposition dépend de façon critique de la jauge choisie qui détermine la forme tensorielle du propagateur du  $W$ , et par exemple dans l'équation précédente (5.3), nous avons implicitement choisi la jauge de 't Hooft-Feynman. Dans cette jauge le tenseur en question se réduit à  $g_{\mu\nu}$  ce qui alors permet d'utiliser les polarisations suivantes pour le  $W$  interne :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0^\mu &= \frac{Q^\mu}{\sqrt{-Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{Q}^2 - (Q^0)^2}} (Q^0, -\tilde{Q} \sin(\alpha) \cos(\varphi), -\tilde{Q} \sin(\alpha) \sin(\varphi), \tilde{Q} \cos(\alpha)) \\
\varepsilon_{(h=\pm 1)}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, h \cos(\alpha) \cos(\varphi) - i \sin(\varphi), h \cos(\alpha) \sin(\varphi) + i \cos(\varphi), h \sin(\alpha)) \\
\varepsilon_3^\mu &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{Q}^2 - (Q^0)^2}} (\tilde{Q}, -Q^0 \sin(\alpha) \cos(\varphi), -Q^0 \sin(\alpha) \sin(\varphi), Q^0 \cos(\alpha))
\end{aligned}
\tag{5.4}$$

où  $\tilde{Q}$  est le module de l'impulsion,  $Q^0$  l'énergie,  $\alpha > 0$  est l'angle que fait l'impulsion  $\vec{Q}$  avec le faisceau,  $h$  est l'hélicité du  $W$  et  $\varphi$  est l'angle de la projection de l'impulsion sur le plan perpendiculaire au faisceau, par rapport à un axe  $Ox$  fixé dans ce plan. Ces polarisations vérifient donc  $\varepsilon_i \cdot \bar{\varepsilon}_i = -1$  ( $i = 0, \pm 1$ ),

$\varepsilon_3 \cdot \bar{\varepsilon}_3 = 1$  et  $\varepsilon_j \cdot Q = 0$  ( $j = \pm 1, 3$ ). On obtient alors la décomposition suivante  $g_{\mu\nu} = -\varepsilon_\mu^0 \bar{\varepsilon}_\nu^0 - \varepsilon_\mu^+ \bar{\varepsilon}_\nu^+ - \varepsilon_\mu^- \bar{\varepsilon}_\nu^- + \varepsilon_\mu^3 \bar{\varepsilon}_\nu^3$ . Le fait que le mode longitudinal soit normé différemment des autres vecteurs n'est pas surprenant. En effet, puisque  $\varepsilon^0 \propto Q$  est de norme négative dans notre cas, la simple application du théorème d'inertie de Sylvester<sup>(4)</sup> impose que deux autres vecteurs sont normés négativement et un troisième positivement (ici  $\varepsilon^3$ ). Dans la jauge unitaire ou la jauge de Landau, on obtiendrait un coefficient différent pour  $\varepsilon^0$  dans la décomposition du tenseur du propagateur.  $\varepsilon^0$  étant proportionnel à l'impulsion  $Q$ , on cherchera à s'en débarrasser car cette polarisation provoquerait dans l'amplitude des divergences dont on ne veut pas. L'équation précédente devient alors :

$$d\sigma_{tot} = \frac{\sum_{h,h'} (-1)^{\delta_{h,3} + \delta_{h',3}} (\mathcal{M} \cdot \varepsilon^{(h)}) (\mathcal{N} \cdot \bar{\varepsilon}^{(h)}) (\bar{\mathcal{M}} \cdot \bar{\varepsilon}^{(h')}) (\bar{\mathcal{N}} \cdot \varepsilon^{(h')})}{4(2\pi)^3 s P_{out}^0 (Q^2 - M_W^2)^2} \times p_W^2 dp_W d(\cos(\theta)) d\varphi d?_{sub} \quad (5.5)$$

$d?_{sub}$  représente l'élément d'espace de phase du sous-processus. A ce stade de la décomposition, nous nous sommes ramenés au numérateur de l'expression au produit de deux matrices densité. Avant d'aller plus loin, il va falloir choisir des variables cinématiques bien adaptées au calcul de (5.5). Bien adapté cela signifie que les variables utilisées peuvent décrire indépendamment la désintégration primaire et la section efficace du sous-processus. Le choix des variables cinématiques détermine donc la ou les variables dont dépend la fonction de structure, et nous devons donc faire un choix avant de pouvoir intégrer sur certaines variables dans (5.5) et afin de nous ramener si possible à une expression de la forme de (5.1). Il est important ici de bien définir nos variables étant donné l'importante disparité qui existe dans la littérature sur ce sujet, et de façon à éviter des confusions. Comparons donc des conventions plus anciennes avec d'autres que je propose pour la dérivation des

---

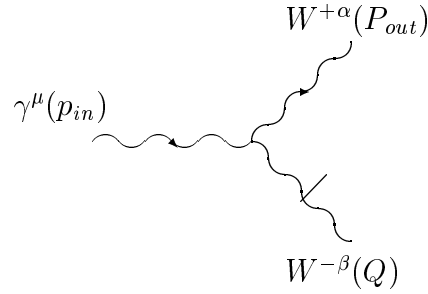
<sup>(4)</sup>Ce théorème montre que le nombre de valeurs propres positives et négatives d'une matrice représentant une forme hermitienne ne dépend pas de la base choisie pour l'exprimer.



fonctions de structure.

### 5.1.3 Bref rappel sur les variables cinématiques

Il est important de rappeler quelques conventions de notations qui seront utiles dans la suite, c'est à dire celles de Altarelli and Parisi (voir [84]) et de Dawson (voir [85]). Les conventions que je préfère et que donc j'aurai le plus utilisé sont voisines de celles de Dawson. L'impulsion de la particule incidente est notée  $p_{in}$  (celle de la particule qui arrive dans le sens opposé pour rentrer en collision avec la première est naturellement notée  $p_{target}$ ), celle de la particule réelle sortante (souvent appelée particule spectatrice) est notée  $P_{out}$ , et  $Q$  désigne l'impulsion du  $W$  virtuel<sup>(5)</sup>.



à la Altarelli-Parisi

$$\begin{aligned} p_{in} &= P(1, 0, 0, 1) \\ P_{out} &= \left( (1-z)P + \frac{|\vec{p}_T|}{2(1-z)P}, \vec{p}_T, (1-z)P \right) \end{aligned}$$

---

<sup>(5)</sup>Par anticipation avec ce que nous verrons dans la suite nous considérons le cas du photon qui se désintègre en un  $W^+$  réel (spectateur) et un  $W^-$  virtuel (interne). On peut tout aussi bien considérer le même paramétrage pour un fermion qui se désintègre en un  $W$  virtuel et un fermion spectateur.

$$\begin{aligned}
Q &= \left( zP + \frac{|\vec{p}_T|}{2zP}, -\vec{p}_T, zP \right) \\
\varepsilon_h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0, 1, ih, -\frac{p_x + ihp_y}{zP} \right) \text{ (et similairement pour } \varepsilon(P_{out}) \text{)} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Cette façon de paramétrer les impulsions avait pour application des quarks légers ou des gluons<sup>(6)</sup> dans la théorie d’Altarelli et Parisi [84], et son objectif était de regarder des comportements à faible impulsion transverse. Nous verrons que nous serons nous aussi contraints de nous limiter à de faibles impulsions transverses à cause de la non-invariance de jauge des calculs. Notons que dans (5.6) la conservation exacte de l’énergie n’est pas respectée et la particule intermédiaire est aussi considérée sur sa couche de masse (qui est nulle pour les quarks et gluons étudiés par Altarelli et Parisi). Altarelli et Parisi appliquent ce paramétrage à la limite à angle de diffusion nul où des singularités apparaissent pour  $z$  petit, qui sont traitées à l’aide de distributions. Lorsqu’on s’intéresse à des  $W$ , la masse présente dans le propagateur rend l’amplitude moins singulière et considérer le  $W$  vraiment on-shell comme le gluon dans (5.6) se justifie moins. En effet dans le cas du gluon, on n’a pas d’échelle de masse et  $|Q^2| \ll s$  est le critère qui permet de prendre le gluon on shell. Pour le  $W$  par contre, une condition “forte” pour l’approximation on-shell serait  $|Q^2 - M_W^2| \ll M_W^2$  qui n’est jamais vérifiée, et on a seulement  $|Q^2 - M_W^2| \ll s$  qui est une approximation plus grossière. De plus, l’application pratique de ce formalisme pour  $z$  très petit ne peut pas fonctionner si on fait aussi l’approximation des petits angles de diffusion pour le calcul des polarisations (comme le font Altarelli et Parisi). En effet, cette approximation peut être très bonne pour la particule “spectatrice”, mais pour la particule virtuelle,  $z$  petit signifie aussi grand angle de diffusion (si  $zP$  est du même ordre que l’impulsion transverse) et l’approximation des petits angles sur la polarisation ne se justifie plus. Dans les premiers calculs de fonctions de structure que nous avons effectué nous avons considéré un paramétrage sans les approximations des équations (5.6), et nous avons pris plutôt :

---

<sup>(6)</sup>Dans tous les cas que nous avons traité, les particules incidentes sont sans masse ou de masse négligeable, de sorte qu’on a dans le référentiel du centre de masse  $P = \sqrt{s}/2$ .

$$\begin{aligned}
p_{in} &= P(1, 0, 0, 1) \\
P_{out} &= \left( \sqrt{M_W^2 + p_T^2 + (1-z)^2 P^2}, \vec{p}_T, (1-z)P \right) \\
Q &= \left( P - \sqrt{M_W^2 + p_T^2 + (1-z)^2 P^2}, -\vec{p}_T, zP \right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

et des polarisations exactes pour les trois particules, y compris la virtuelle pour laquelle on utilise (5.4) (paramétrées en termes de  $\vec{p}_T$ ,  $z$  et  $P$ ). On notera aussi la présence dans ces formules de  $M_W$  qui n'avait pas lieu d'être pour les particules de masses nulles considérées par Altarelli et Parisi.

### à la Dawson

$$\begin{aligned}
p_{in} &= P(1, 0, 0, 1) \\
P_{out} &= (E, p_{out} \vec{n}(\theta, \varphi)) \\
Q &= \left( xP, \sqrt{x^2 P^2 - M_W^2} \vec{n}' \right)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire dans la direction  $(\theta, \varphi)$  de la particule sortante, et  $\vec{n}'$  est un vecteur unitaire dans la direction de l'impulsion  $\vec{p}_{in} - \vec{P}_{out}$  (qui fait l'angle  $-\alpha$  avec le faisceau). Dans ce cas-ci, appliqué à la production de  $W$  par des quarks légers ( $E \simeq p_{out}$ ), le paramètre essentiel n'est plus la fraction d'impulsion projetée sur l'axe  $[Oz]$ , mais plutôt la fraction d'énergie qu'emporte le  $W$  par rapport au quark incident. Dans l'article associé [85] sont dérivés les fonctions de structure du  $W$  dans les quarks légers en utilisant la méthode dite de l'Approximation du W Equivalent (notée EWA). Dans cette approximation on ne s'intéresse qu'aux diffusions à petit angle, et on admet que la virtualité du  $W$ ,  $Q^2 - M_W^2$ , est suffisamment petite pour que le  $W$  puisse être considéré comme réel. Cette considération un peu vague peut

être implémentée de plusieurs façons. La méthode de Dawson consiste à casser la conservation de l'énergie-impulsion au vertex  $q \rightarrow q' + W$  et de projeter l'impulsion  $p_{in} - P_{out}$  sur la couche de masse du  $W$ , ce qui conduit à l'expression ci-dessus pour  $Q$ . Une autre façon de faire que je considère plus physique est celle développée dans [86] où la conservation de l'énergie-impulsion est respectée au vertex initial, mais où néanmoins la section efficace du sous-processus est calculée sur couche de masse avec pour énergie la masse invariante des deux particules incidentes. Une différence importante est que dans la formulation de Dawson, le seuil d'énergie transmissible au sous-processus est beaucoup plus grand que dans la formulation de la référence [86].

### Le paramétrage que j'ai utilisé

$$\begin{aligned}
p_{in} &= P(1, 0, 0, 1) \\
P_{out} &= (E_{out}, p_{out} \vec{n}(\theta, \varphi)) \\
\text{avec } E_{out} &= P(1 + \varepsilon - \tau) \text{ et } p_{out} = P\sqrt{\lambda(1, \varepsilon, \tau)} \\
Q &= p_{in} - P_{out} = (P - E_{out}, P\vec{k} - p_{out}\vec{n}) \\
&= P(\tau - \varepsilon, -\sqrt{\lambda}\sin(\theta)\cos(\varphi), -\sqrt{\lambda}\sin(\theta)\sin(\varphi), 1 - \sqrt{\lambda}\cos(\theta))
\end{aligned} \tag{5.9}$$

avec  $\vec{k}$  vecteur unitaire dirigé selon  $[Oz]$ ,  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire dans la direction  $(\theta, \varphi)$  de la particule spectatrice,  $\varepsilon = M_{out}^2/s$  ( $= M_W^2/s$  ici) et  $\tau = \hat{s}/s < (1 - \sqrt{\varepsilon})^2$  (de façon récurrente dans cette thèse nous noterons  $\hat{s} = M_X^2$  = la masse invariante produite dans le sous-processus).  $\lambda(x, y, z)$  est la fonction qui intervient dans le calcul de l'espace de phase à deux particules, c'est à dire  $\lambda = (x+y-z)^2 - 4xy$ .

Si on se place dans le cadre d'un collisionneur linéaire à  $\sqrt{s} = 2 \text{ TeV}$ ,  $\varepsilon = 0.00161$  et on peut souvent dans les calculs faire l'approximation  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Néanmoins il faut

être prudent, et il peut apparaître dans le cours des calculs des termes en  $\sqrt{\varepsilon} = 4\%$ . Cette valeur apparaît dans le domaine de variation de  $\tau$ , et peut constituer un pôle apparent dans les fonctions de structure. Ce pôle ne correspond pas à un phénomène physique et si l'on prend soin de bien regarder le numérateur des expressions, on s'aperçoit que ce pôle disparaît, et les fonctions de structure que l'on calcule sont bien continues en  $\tau = \sqrt{\varepsilon}$ . Cela rend néanmoins le passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  difficile. Nous verrons ce point plus précisément lorsque nous arriverons au calcul explicite des fonctions de structure.

#### 5.1.4 Relations entre les trois paramétrages

$$x = \tau - \varepsilon \tag{5.10}$$

$$z = 1 - \sqrt{\lambda(1, \varepsilon, \tau)} \cos(\theta) \tag{5.11}$$

La première relation montre que le paramétrage présenté en (5.9) est très voisin de celui de Dawson, puisque nous nous intéressons à de très petites valeurs de  $\varepsilon$ . La seconde montre que le paramètre  $z$  d'Altarelli et Parisi ne va pas convenir si l'on s'intéresse à des impulsions transverses non-nulles. En effet, pour calculer la section efficace totale du sous processus, on a besoin comme seul paramètre de l'énergie dans le centre-de-masse des particules incidentes, ou bien de la masse invariante des particules finales (qui lui est égale comme l'exige la conservation de l'énergie-impulsion). Par conséquent le paramètre vraiment pertinent pour calculer la section efficace du sous-processus c'est  $M_X^2 = \hat{s}$ , ou encore  $\hat{s}/s = \tau$  pour travailler avec des nombres sans dimension. Une fois cette remarque effectuée, la fonction de structure est quasiment contrainte d'être définie en utilisant le même paramètre de façon à pouvoir faire le produit de convolution de ces deux fonctions, qui constitue le coeur du formalisme des fonctions de structure tel qu'il est présenté dans la littérature.

En utilisant donc le paramètre  $z$  pour décrire la fonction de structure, le produit de convolution n'est *a priori* plus possible car dans la relation précédente intervient  $\cos(\theta)$ , sur lequel on est censé avoir déjà intégré. Néanmoins on peut envisager d'amménager le formalisme des fonctions de structure en définissant une fonction de structure comme ayant deux variables cinématiques et en écrivant par exemple (voir notations eq. (5.6)) :

$$\sigma_{processus\ complet} = \int dz \int d\tilde{p}_T D(z, \tilde{p}_T = p_T/P) \sigma_{sous-processus}(\tau) \quad (5.12)$$

$$avec \quad \tau = 1 + \varepsilon - \sqrt{(1-z)^2 + \tilde{p}_T^2 + 4\varepsilon} \quad (5.13)$$

Où la fonction  $D$  est la fonction de structure dans ce formalisme. Cette définition est tout à fait pertinente et c'est essentiellement pour nous conformer à ce qui existe déjà dans la littérature que nous allons chercher plutôt à obtenir une expression de la forme de l'équation (5.1). Comme il n'est pas possible de ramener la première définition à une seule intégrale de la forme (5.1), ces deux définitions ne sont pas équivalentes, mais on peut quand même remarquer que dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (grande énergie) et pour des angles de diffusion petits ( $\theta \rightarrow 0$ ) on a  $z = \tau$ . On peut donc s'attendre dans beaucoup de cas à ce qu'on ait peu d'écart entre ces deux définitions, c'est à dire  $D(z, \tilde{p}_T) \simeq D(\tau)\delta(\tilde{p}_T)$ .

### 5.1.5 Quelques difficultés

Pour obtenir un résultat qui ne dépende que de la section efficace du sous-processus (éléments diagonaux de la matrice densité), il nous faut discuter sur les termes d'interférence ( $\tau \neq \tau'$ ), qui doivent être négligeables pour que le formalisme des fonctions de structure ait un sens (exprimé comme dans l'eq. (5.1)). Le point important que je voudrais signaler ici est que ces interférences sont bien présentes

mais que dans certaines situations on peut les négliger. Dans le cas où on ne peut pas les négliger, alors on doit adopter un autre formalisme de fonction de structure qui en tienne compte. Le cas des  $W$  dans les fermions a été traité depuis déjà longtemps (voir [87, 88, 89, 90]), et il en ressort qu'on peut en général négliger les interférences entre mode longitudinal et modes transverses. Par contre les deux polarisations transverses interfèrent et on a alors intérêt à prendre une moyenne sur ces polarisations.

Si on écrit pour les fermions légers, en sommant sur les polarisations des fermions :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M} \cdot \varepsilon^{(\tau)})(\bar{\mathcal{M}} \cdot \bar{\varepsilon}^{(\tau')}) &\propto \text{tr}[\not{p}_{in} \not{\varepsilon}(\tau) \not{p}_{out} \not{\bar{\varepsilon}}(\tau')] \\
&= 4[(p_{in} \cdot \varepsilon(\tau))(p_{out} \cdot \bar{\varepsilon}(\tau')) + (p_{out} \cdot \varepsilon(\tau))(p_{in} \cdot \bar{\varepsilon}(\tau')) \\
&\quad - (p_{out} \cdot p_{in})(\varepsilon(\tau) \cdot \bar{\varepsilon}(\tau'))] \tag{5.14}
\end{aligned}$$

on peut évaluer numériquement le rapport entre les éléments diagonaux et non-diagonaux<sup>(7)</sup>. De même pour le cas  $\gamma \rightarrow W^+W^-$  pour lequel j'ai effectué le calcul en jauge de 't Hooft-Feynman. Les interférences sont représentées sur la figure 5.2 en fonction de l'angle de diffusion du  $W$  spectateur et du paramètre  $\tau$ . Sur cette figure on a représenté en haut le cas  $\gamma \rightarrow W^+W^-$  et en bas  $f \rightarrow f'W$ , avec à gauche  $M^2(1, -1)/M^2(1, 1)$  et à droite  $M^2(1, 1)/M^2(1, L)$  <sup>(8)</sup>.

La région cinématique qui domine dans les processus que nous étudions ici est la région où  $\cos(\theta)$  est proche de 1 et  $\tau$  de l'ordre de  $\varepsilon = M_W^2/s \simeq 0$ . Or on constate justement dans cette région que les éléments diagonaux et non-diagonaux sont de

---

<sup>(7)</sup>La polarisation proportionnelle à l'impulsion n'intervient pas ici dans la mesure où on a considéré les fermions de masse nulle, et que par conséquent le vertex primaire correspond pratiquement à un courant conservé, autrement dit  $Q^\mu \mathcal{M}_\mu = 0$ .

<sup>(8)</sup> $M^2(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{\lambda_\gamma, \lambda_{W^+}} \mathcal{M}(\gamma \rightarrow W^+W^-(\lambda)) \mathcal{M}(\gamma \rightarrow W^+W^-(\bar{\lambda}))^*$  (et similairement pour  $q \rightarrow q'W$ )

même ordre de grandeur. Avec toutefois une différence pour l'interférence entre  $W$  transverse et  $W$  longitudinal qui est petite par rapport aux éléments diagonaux transverses, mais ce n'est vrai que sur une petite plage angulaire (moins de 10 degrés). Il faut par conséquent faire attention avant de négliger les interférences, et en cas d'ambiguïté, il faut tenir compte du sous-processus qui peut lui aussi sélectionner un mode de polarisation plutôt qu'un autre, comme le mentionne Dawson [85].

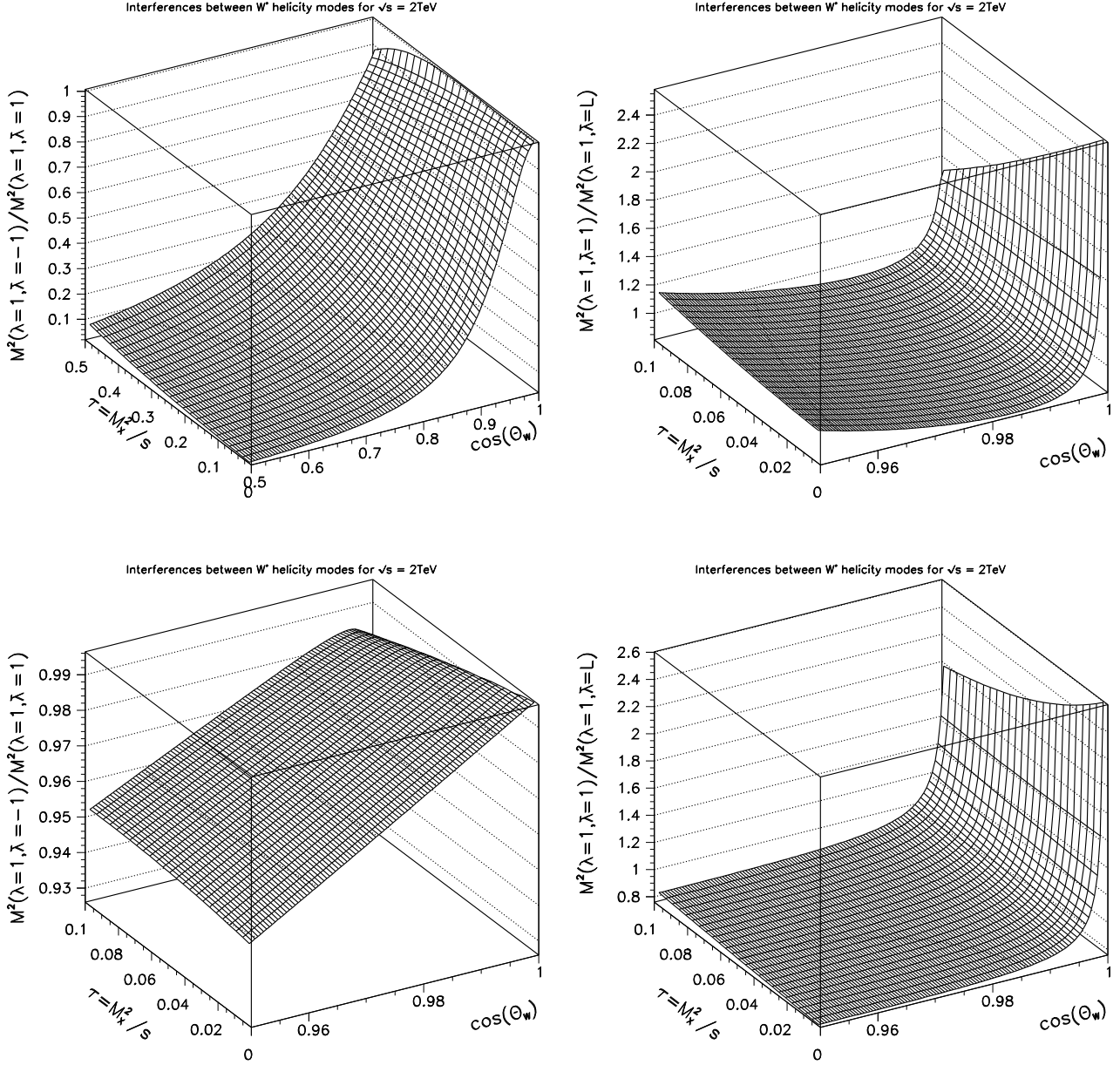
Parlons maintenant un peu du facteur de flux que nous allons utiliser pour calculer la section efficace du sous processus. Il n'y a pas vraiment une façon unique de définir ce facteur, et son calcul est plutôt de l'ordre de la recette. Par exemple, on peut utiliser le produit des énergies incidentes (comme on l'écrit parfois dans le centre de masse des particules incidentes). Ici, pour commencer je vais plutôt prendre une définition covariante de ce facteur. La définition choisie est donc simplement le prolongement de la définition usuelle au cas où l'une des impulsions (ou les deux) n'est pas de genre temps, c'est à dire précisément :

$$F = \frac{1}{4\sqrt{(Q \cdot p_{target})^2 - Q^2 p_{target}^2}} \quad (5.15)$$

On peut montrer facilement que cette expression est bien définie à partir du moment où on a la condition  $(Q + p_{target})^2 \geq s_0 \geq 0$  (même si  $p_{target}^2 < 0$ ), condition de seuil qui permet de déclencher le sous processus. Notre objectif étant de définir des fonctions de structure qui soient indépendantes de la particule qui arrive dans le sens opposé, on sera amené à négliger la masse de cette particule ( $m = \sqrt{p_{target}^2}$ ), ce qui néanmoins restreint un peu le champ d'application de nos fonctions de structure. Le facteur de flux devient alors :  $F^{-1} = 4Q \cdot p_{target} = s(1 + \tau - \varepsilon - \sqrt{\lambda} \cos(\theta))$ .



**Fig. 5.2:** Interférences pour  $\sqrt{s} = 2TeV$ . En haut  $\gamma \rightarrow W^+W^-(\lambda)$ . En bas  $q \rightarrow q'W(\lambda)$ .



Enfin, avant d'aller plus avant dans la dérivation des fonctions de structure, il nous faut mentionner une question importante et encore ouverte : quelle est l'influence de la projection sur couche de masse du sous processus. Autrement dit, dans quelle mesure fait-on une bonne approximation en calculant l'élément de matrice  $S$  du sous-processus comme s'il s'agit d'un processus physique ? Une première indication du fait que cela peut causer des ennuis est donnée par Kleiss et Stirling [91]. Ils montrent en effet que lorsque une amplitude contient des vertex non-abéliens, et qu'un boson vecteur externe n'est pas sur sa couche de masse, alors le comportement à haute énergie de cette amplitude peut violer des contraintes d'unitarité de la matrice de diffusion<sup>(9)</sup>. Le fait que ces divergences apparaissent n'est pas surprenant. C'est le signe clair que l'amplitude que l'on tente de calculer *off-shell* dépend de la jauge choisie pour la calculer. Si l'on regarde le processus complet (en incluant la particule spectatrice, sans faire l'hypothèse qu'elle provient d'une désintégration initiale que l'on pourrait isoler), les graphes que nous avons négligés ici vont compenser ces divergences qui n'apparaissent plus dans le processus physique. Prenons un exemple connu depuis longtemps, détaillé par Hagiwara et al. (voir [92]) avec le processus  $e^+e^- \rightarrow e^-\nu_e W^+$ . Ce processus comprend 8 graphes dont 4 graphes d'annihilation  $e^+e^-$  que l'on peut immédiatement négliger car ils forment un sous-ensemble de graphes invariant de jauge, dont la contribution est petite à haute énergie. Parmi les 4 graphes restant, on s'attend à ce que deux seulement suffisent à reproduire convenablement la section efficace totale. Dans ces deux graphes, l'électron initial rayonne un photon qui fusionne avec le positron pour donner un  $W$  et un neutrino (c'est en fait le sous processus  $\gamma^*e^+ \rightarrow W^+\bar{\nu}_e$  qui est composé de deux graphes). Lorsqu'on regarde la distribution en  $\log(-q^2)$  où  $q^\mu$  est l'impulsion du photon virtuel, on constate que l'écart important qui peut exister entre le calcul exact de la section efficace et l'approximation qui consiste à se limiter aux deux graphes précédent vient des grandes valeurs du transfert  $-q^2$ . En brisant

---

<sup>(9)</sup>Notons que dans le cas d'un sous-processus  $2 \rightarrow 2$ , on peut parfois se ramener pratiquement à un processus *on-shell* en observant que dans la relation  $s + t + u = \sum m_i^2$  les transferts  $t$  et  $u$  interviennent en général dans des régions de l'espace de phase disjointes. De sorte qu'en modifiant une des masses cela revient à modifier  $t$  ou  $u$ . On sait que dans la région où  $t$  domine on pourra modifier  $u$  sans trop de perturbation. On peut montrer que cela revient à effectuer une rotation sur l'impulsion sur laquelle on a modifié la masse. Je n'ai pas beaucoup approfondi cette idée.

l'invariance de jauge, on fait donc apparaître d'énormes contributions aux grandes valeurs de transfert, ou encore à grande impulsion transverse ce qui revient presque au même. Cette observation nous conduira dans la suite à imposer une limitation sur la valeur du transfert ce qui est une première limitation du formalisme des fonctions de structure (ici pour le contenu en photon de l'électron, mais aussi pour le contenu en  $W$  de l'électron ou du photon). Dans le cadre de l'approximation du photon équivalent [93, 94] qui a été utilisée par Hagiwara et al. pour  $e^+e^- \rightarrow e^-\nu_e W^+$ , la prescription utilisée est de limiter le transfert à "l'échelle caractéristique du sous-processus". Cette échelle caractéristique est définie de façon un peu subjective dans le cas général. Mais néanmoins, si le sous-processus comprend un graphe de type "canal t", l'échelle caractéristique est définie comme étant la plus petite valeur que peut prendre le dénominateur du propagateur impliqué dans ce graphe. Si ce graphe comprend plusieurs "voies t" alors il existe une *hiérarchie* en transfert comme mentionné dans [95] (dans le cas de QCD). Si par contre le sous-processus est essentiellement un processus d'annihilation (par exemple  $W^+W^-H$ ), alors la seule échelle dont on dispose est la masse du Higgs. Nous verrons plus loin dans les tests que nous avons conduits relativement à la production de Higgs lourd par fusion de  $W$ , que cette échelle est assez pertinente.

## 5.2 Dérivation des fonctions de structure

### 5.2.1 Comparaisons des fonctions de distribution en $W_L$ dans un électron ou dans un photon

Des fonctions de structure relativement simples ont déjà été calculées pour les  $W$  dans des fermions légers. [96, 85, 97, 98]. Les auteurs de ces articles s'intéressaient essentiellement à la brisure de symétrie, et il est alors très utile de disposer de la fonction de distribution du  $W$  longitudinal dans diverses particules. C'est en effet

ce mode de polarisation du  $W$  qui se couple le plus à une particule scalaire<sup>(10)</sup>. Dans l'approximation du  $W$  équivalent (EWA) qui était utilisée pour obtenir ces fonctions de distribution, on considère le  $W$  interne comme étant sur couche de masse et on s'intéresse aux diffusions à petit angle. En faisant l'approximation la plus grossière on obtient pour un électron non polarisé :

$$D_{W_L/e}(z) = \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \frac{1-z}{z} \quad (5.16)$$

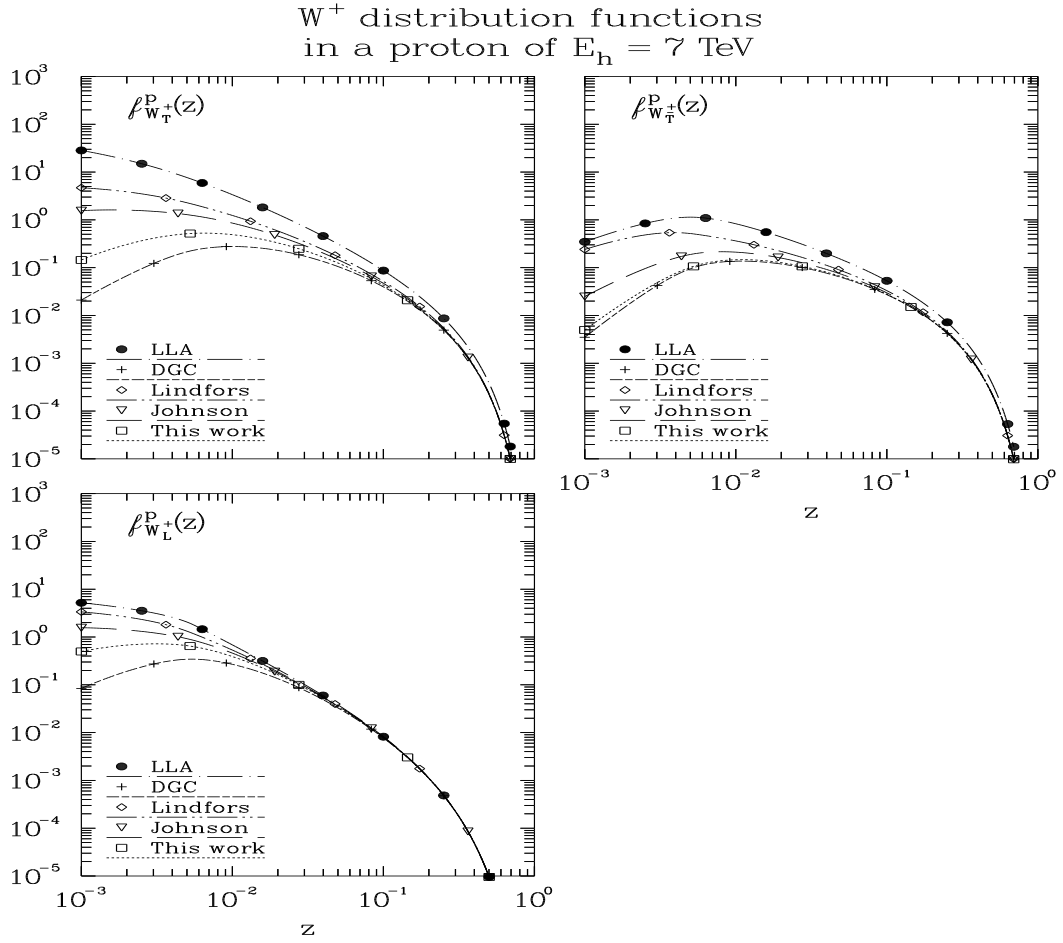
où  $z$  est la fraction d'impulsion longitudinale emportée par le  $W$  (voir eq. (5.7)). Dans l'optique du collisionneur LHC, de nombreuses versions de fonctions de structure ont été développées avec différents raffinements. Dans un article récent [99] on trouve une comparaison entre différentes fonctions de structure. Toutes ces fonctions s'accordent lorsque l'énergie transmise n'est pas petite (les effets de masse du  $W$  sont alors vraiment négligeables) mais le désaccord à très bas transfert d'énergie se situe sur plusieurs ordres de grandeurs (voir figure 5.3). Or, lorsque nous avons étudié le couplage  $H^3$ , nous avons pu constater que la distribution en énergie du sous processus domine pour de petites valeurs de l'énergie (voir plus loin figure 7.10). Le désaccord entre ces fonctions de structure à faible transfert d'énergie risque donc fort d'influer lourdement sur les résultats prédictifs, c'est à dire sur la convolution de ces fonctions avec différents sous-processus.

La fonction de distribution des  $W_L$  dans le photon a été étudiée récemment [96, 73, 100]. Sa dérivation a été effectuée en calculant le processus  $\gamma W \rightarrow WH$  [73, 96],

---

<sup>(10)</sup>C'est d'ailleurs l'intérêt d'un collisionneur  $\gamma\gamma$  de produire un grand nombre de paires de  $W_L$  virtuels qui fusionnent. C'est pourquoi nous nous sommes concentré sur les fonctions de distributions dans le photon et que nous nous bornerons à un bref rappel sur le cas des électrons. Nous n'avons rien apporté de vraiment nouveau sur ce dernier cas.

**Fig. 5.3:** Fonctions de structure décrivant le contenu en  $W$  dans le proton (figure issue de [99]). La convolution avec les fonction de distribution des quarks dans le proton a été faite sur ces courbes. La variable  $z$  utilisée ici correspond exactement au paramètre  $\tau$  défini eq. (5.9)



mais il est à noter que ce sujet est encore très nouveau et encore peu étudié en détail. Cette question est beaucoup plus complexe à cause des problèmes d'invariance de jauge qui se rajoutent aux effet de masse déjà présents dans le cas de l'électron. En effet, si on néglige la masse de l'électron, le vertex  $V^\mu = V(e\nu_e W(k)^\mu)$  est pratiquement un courant conservé ( $k_\mu V^\mu \simeq 0$ ) et cette simple identité de Ward suffit pour considérer la désintégration de l'électron en neutrino et  $W$  comme quasiment un processus physique. Le cas du photon comporte un vertex non-abélien et on n'a plus affaire à un courant conservé. Les résultats simples qui ont été obtenus alors s'avèrent efficaces dans de nombreux cas bien qu'il ne faille pas être trop exigeant sur les qualités prédictives de ces fonctions.

On peut distinguer deux situations différentes. La première correspond à un  $W$  spectateur transverse et la deuxième prend en compte un  $W$  spectateur longitudinal. Ce terme n'existe pas si on a un électron dans l'état initial à la place du photon. Finalement, à une constante multiplicative près on obtient la même fonction de structure que dans le cas de l'électron [73] :

$$D_{W_L \in \gamma_{\lambda_{in}}}^{(W_{\lambda_{out}})}(z) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1-z}{z} \quad (5.17)$$

Dans ce cas, le photon transfère son hélicité au  $W$  spectateur. La grande différence avec l'électron est que la probabilité d'obtenir un  $W_L$  est la même quelle que soit la polarisation du photon, alors qu'une seule polarisation contribue pour l'électron. On peut donc écrire la fonction de structure *non polarisée* :

$$D_{W_L \in \gamma}^{(W_T)}(z) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1-z}{z} \quad (5.18)$$

La fonction de distribution ayant un  $W_L$  spectateur a été dérivée en scindant le processus  $\gamma W_L \rightarrow WH$ . Notons que le terme  $-2$  dans la fonction de distribution

eq. (5.19) est particulier au processus choisi. On le remplacera dans la suite par  $-1$  qui est plus universel (on le constate sur d'autres processus que  $\gamma W_L \rightarrow WH$ ). Avec un  $W_L$  spectateur il a été montré [73] que l'approximation n'est pas trop mauvaise pour  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$  dans le cas d'un Higgs lourd ( $M_H > 400 \text{ GeV}$ ). Nous avons confirmé ces résultats dans la suite (figure 7.8).

$$D_{W_L \in \gamma_\lambda}^{(W_L^{out})}(z, Q_p^2) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{z(1-z)}{2} \left( -2 + \ln \frac{Q_p^2}{M_W^2} \right) \quad (5.19)$$

Où  $Q_p^2$  est une valeur typique de  $Q^2$  pour le sous-processus, dans le même esprit que Hagiwara et al. dans [92] comme on l'a rappelé dans la section précédente. Même en considérant le comportement logarithmique en  $Q_p^2$ , cette contribution reste petite en comparaison avec le cas d'un  $W_T$  spectateur dont le taux de production est un ordre de grandeur plus grand à haute énergie. De sorte que dans la suite, nous nous intéresserons plus souvent au cas d'un  $W$  spectateur transverse et en particulier pour le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  avec deux  $W_T$  sortant (voir l'étude sur le couplage  $H^3$ ), et aussi à  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$  qui a des propriétés équivalentes.

A partir de ces résultats, essayons d'approfondir la dérivation des fonctions de structure. Dans un premier temps on peut débiter le calcul des fonctions de structure d'une façon assez grossière (en éliminant dès que possible la masse du  $W$ ). Pour cela nous avons calculé le vertex  $\gamma W^+W^-$  avec un  $W$  en dehors de sa couche de masse, et ses vecteurs de polarisation sont prolongés à l'aide de la base vue en début de chapitre (eq. (5.4)). En utilisant les variables de Altarelli et Parisi (voir eq. (5.7)) on obtient ce résultat pour l'amplitude ( $\lambda_\gamma$  désigne la polarisation du photon incident,  $\lambda_{out}$  la polarisation du  $W$  spectateur et  $\lambda^*$  la polarisation du  $W$  interne,  $z$  est la fraction d'impulsion longitudinale emportée par le  $W$  interne et  $y = 1 - z$ , et  $\tilde{p}_T$  est le rapport de l'impulsion transverse du  $W$  spectateur sur l'énergie du photon incident) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\lambda^*}^{\lambda_\gamma \lambda_{out}} = & \frac{ie}{\sqrt{2}} p_T \left\{ \lambda_\gamma \left( 1 + \frac{\lambda_{out} \lambda^* (\tilde{p}_T^2 - zy)}{\sqrt{z^2 + \tilde{p}_T^2} \sqrt{y^2 + \tilde{p}_T^2}} \right) \right. \\
& + \frac{\lambda^*}{\sqrt{y^2 + \tilde{p}_T^2}} \left( 1 + \frac{\lambda_\gamma \lambda_{out} z}{\sqrt{z^2 + \tilde{p}_T^2}} \right) + \frac{\lambda_{out}}{\sqrt{z^2 + \tilde{p}_T^2}} \left( 1 + \frac{\lambda_\gamma \lambda^* y}{\sqrt{y^2 + \tilde{p}_T^2}} \right) \left. \right\} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cong & \frac{ie}{\sqrt{2}} p_T \left\{ \lambda_\gamma (1 - \lambda_{out} \lambda^*) + \frac{\lambda^*}{y} (1 + \lambda_\gamma \lambda_{out}) + \frac{\lambda_{out}}{z} (1 + \lambda_\gamma \lambda^*) \right\} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

avec pour le vertex  $\gamma W^+ W^-$  l'expression suivante (voir annexe B) :

$$-ie [g_{\alpha\beta} (p_- - p_+)_\mu + 2(k_\alpha g_{\mu\beta} - k_\beta g_{\mu\alpha})] \quad (5.22)$$

Notons qu'on retrouve une expression semblable à celle d'Altarelli et Parisi [84] dans le cas du vertex à trois gluons. Détaillons maintenant un peu l'amplitude  $\mathcal{M}(\gamma \rightarrow W^+ W_L^-)$ . Avec les notations de Altarelli et Parisi on obtient cette fois :

$$\mathcal{M}_{\lambda_\gamma, \lambda_{out}} = \frac{ie P^2}{\sqrt{-Q^2}} \left( 1 + \frac{\lambda_\gamma \lambda_{out} (1 - z)}{\sqrt{(1 - z)^2 + \tilde{p}_T^2}} \right) \left( z \frac{E_{W^*}}{|\vec{p}_{W^*}|} - \frac{|\vec{p}_{W^*}|}{P} \right) \quad (5.23)$$

La dernière parenthèse provoque un mauvais comportement à haute énergie (ou bien  $M \rightarrow 0$ ) que l'on peut éliminer en écrivant que  $\varepsilon^\mu(Q) = Q^\mu / \sqrt{-Q^2} + s^\mu = (\varepsilon^0)^\mu(Q) + s^\mu$  (ici  $s^\mu \rightarrow 0$  quand  $P \rightarrow \infty$ ). Cette parenthèse peut se re-écrire :

$$\frac{1}{P} \left[ \frac{Q^2 - M_W^2}{2\sqrt{-Q^2}} + (p_\gamma \cdot s) \right] \quad (5.24)$$

ce qui donne finalement dans la limite  $\tilde{p}_T \ll z$  :

$$\frac{1}{P} \left[ \frac{Q^2 - M_W^2}{2\sqrt{-Q^2}} + \frac{\tilde{p}_T}{z} \right] \quad (5.25)$$



Par expérience on sait qu'un terme en  $Q^2 - M_W^2$  (qui simplifie le propagateur), se simplifierait avec des termes provenant d'autres graphes dans un processus physique. Nous n'avons pas de recette systématique pour extraire ce type de terme, et notons que si on effectue le même type de technique sur  $\gamma \rightarrow W_L^+ W_L^-$ , ce sont les termes croisés  $P^\mu s^\nu$  qui restent. Le sujet me semblant encore ouvert, je n'en dirai pas plus sur ce type de dérivation. En partant de l'expression (5.5) on obtient :

$$d\sigma_{total} = \int D_W(z) d\sigma_{sous-processus}(\hat{s} = zs) \quad (5.26)$$

où pour  $D_W(z)$  on retrouve les expressions précédentes eq. (5.18) et eq. (5.19) (avec le coefficient  $-1$  en lieu et place du  $-2$ ), et pour  $\gamma \rightarrow W_T W_T$  qui est nouveau j'ai pris la forme intégrale :

$$D_{W_T(\lambda^*)}^{(W_T^{out})}(z) = \int_0^{(\tilde{p}_T^{max})^2} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{z(1-z)\tilde{p}_T^2}{(\varepsilon + \tilde{p}_T^2)^2} |\tilde{\mathcal{M}}_{\lambda^*}^{\lambda_\gamma \lambda_{out}}|^2 d(\tilde{p}_T^2) \quad (5.27)$$

avec pour  $\tilde{\mathcal{M}}_{\lambda^*}^{\lambda_\gamma \lambda_{out}}$  l'expression donnée eq. (5.20) divisée par  $p_T$  pour obtenir une expression sans dimension. La fonction de structure (5.27) donnera lieu à l'approximation que nous appellerons *A1* dans la suite. Si maintenant nous utilisons les conventions associées au paramètre  $\tau$ , on peut calculer aussi les fonctions de structure et pour les transverses (sortant et virtuel) on obtient la figure 5.4. Pour le contenu en  $W$  longitudinaux dans le photon (avec un  $W$  spectateur transverse on obtient la figure 5.5, pour la fonction non-intégrée sur l'angle). Comment obtient on ces résultats? Pour cela nous utilisons la même expression du vertex que précédemment (5.22) mais en paramétrant l'"amplitude" en fonction de  $\tau$ ,  $\cos(\theta)$  et  $\varepsilon$  qui donne les effets de masse et que nous conservons ici. L'intégrale (5.3) devient dans ce cas :

$$d\sigma_{tot} = \int_{\tau_{min}}^{(1-\sqrt{\varepsilon})^2} \bar{D}(\tau) d\sigma_{sub}(\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{\tau s}) d\tau \quad (5.28)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{D}(\tau)_{W_L}^{\lambda_\gamma=1, \lambda_{out}} &= \frac{\alpha}{32\pi} \int_{\cos(\theta)_{min}}^1 d(\cos(\theta)) \sqrt{\lambda} \times \\ &\frac{(1 + \lambda_{out} \cos(\theta))^2 (\lambda + 1 + \varepsilon - \tau - (2 + \varepsilon - \tau) \sqrt{\lambda} \cos(\theta))^2 (1 - \varepsilon + \tau - \sqrt{\lambda} \cos(\theta))}{(1 - \tau - \varepsilon - \sqrt{\lambda} \cos(\theta))(1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} \cos(\theta))(1 + \varepsilon - \tau - \sqrt{\lambda} \cos(\theta))^2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Cette expression nécessite un peu d'explication de texte. Rappelons d'abord que  $\sqrt{\lambda}$  signifie  $\sqrt{\lambda(1, \varepsilon, \tau)}$  car cette notation revient souvent. On a pris dans la formule (5.29) l'hélicité du photon droite et on constate que la première parenthèse du numérateur (à gauche) favorise le transfert de l'hélicité du photon vers le  $W$  spectateur. La parenthèse qui suit vient de l'amplitude, et enfin la troisième vient du facteur de flux (voir eq. (5.15)). Au dénominateur et à gauche, la première parenthèse correspond au  $\sqrt{-Q^2}$  qui normalise la polarisation longitudinale. Celle du milieu vient de l'expression de  $\cos(\alpha)$ ,  $\sin(\alpha)$  toujours dans la polarisation longitudinale, et enfin la troisième vient du propagateur du  $W$ . On a quelques peines à trouver une expression analytique simple de cette formule car il n'y a pas convergence uniforme de la fonction à intégrer quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De plus, en réduisant la fraction en éléments simple on s'aperçoit que pour  $\tau = \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}$  les pôles des deux dernières parenthèses du dénominateur sont identiques, ce qui augmente l'ordre du pôle et modifie la forme de l'expression intégrée pour cette valeur de  $\tau$ . La fonction obtenue est néanmoins bien continue en cette valeur de  $\tau$ . Notons aussi qu'en comparaison avec la fonction de structure naïve (5.18) le résultat est compatible comme on peut le voir sur la figure 5.5. Les premiers tests sur cette fonction ont néanmoins montré que des termes en trop doivent être éliminés afin d'obtenir le bon comportement en énergie. Si on procède de même pour obtenir le contenu en  $W$  transverse dans le photon, avec un  $W$  transverse spectateur, on obtient :

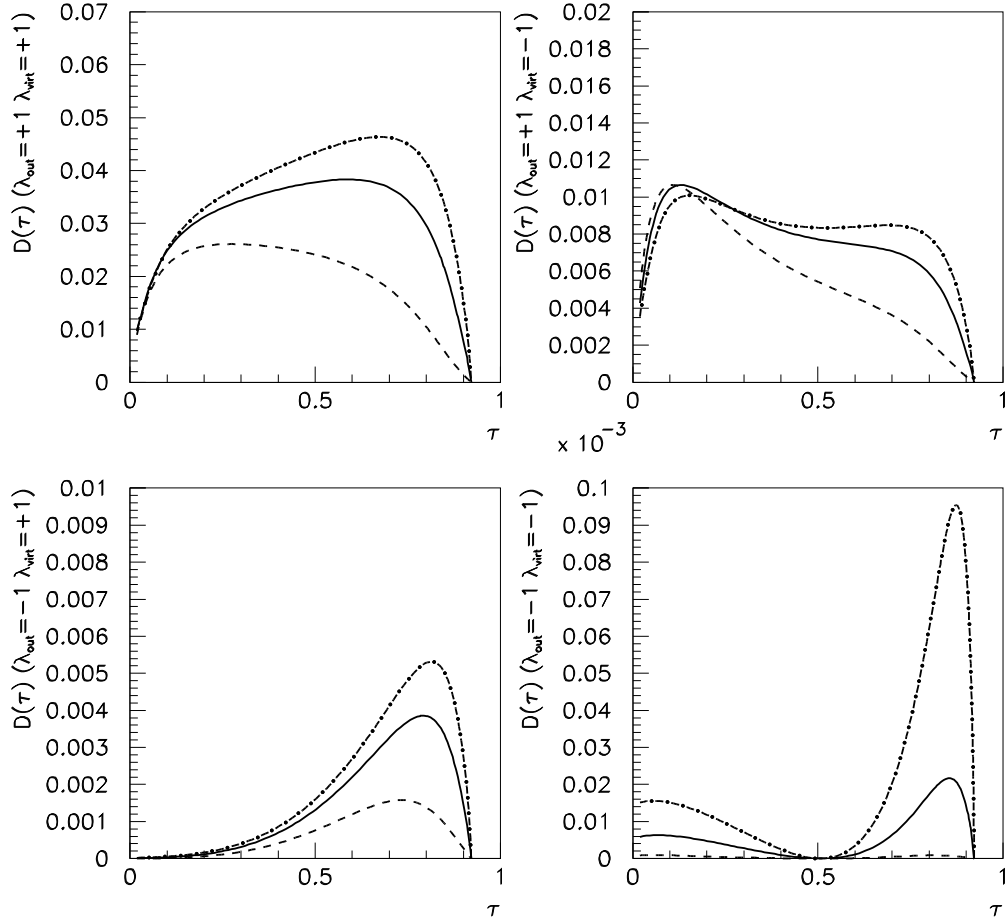
$$\bar{D}(\tau)_{W_T(\lambda^*)}^{\lambda_\gamma=1, \lambda_{out}} = \frac{\alpha}{16\pi} \int_{\cos(\theta)_{min}}^1 d(\cos(\theta)) \sqrt{\lambda} \times \frac{(\lambda_{out} \lambda^* (\lambda + 1 - \sqrt{\lambda} \cos(\theta)) + \lambda_{out} + \lambda^* \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda})^2 \sin^2(\theta) (1 - \varepsilon + \tau - \sqrt{\lambda} \cos(\theta))}{(1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} \cos(\theta)) (1 + \varepsilon - \tau - \sqrt{\lambda} \cos(\theta))^2} \quad (5.30)$$

où  $\lambda_{out}$  est la polarisation du  $W$  spectateur et  $\lambda^*$  celle du  $W$  interne.

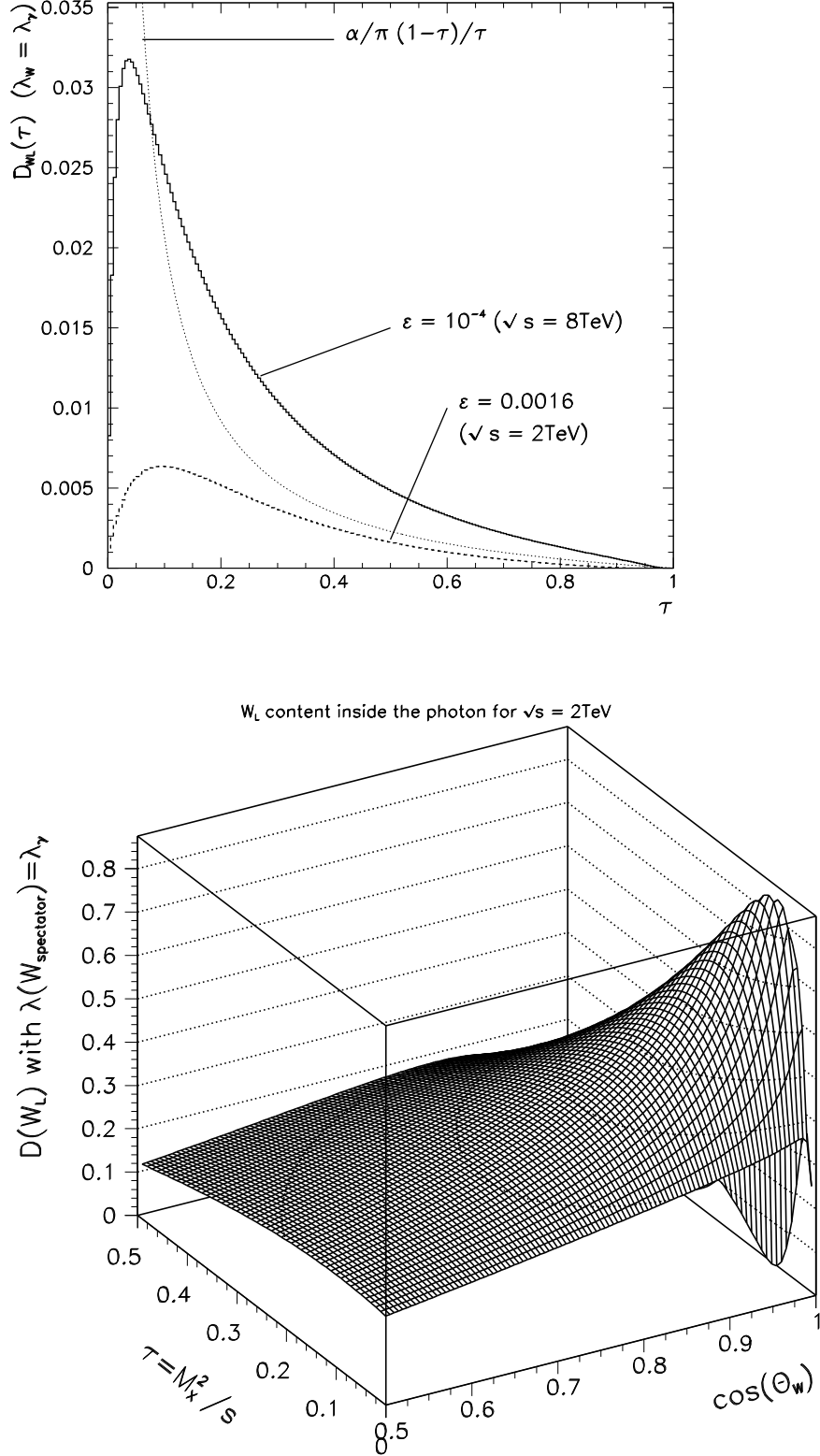
### 5.2.2 L'invariance de jauge

Nous allons présenter ici quelques indices qui permettent de savoir dans quelle mesure les calculs des fonctions de structure que nous menons sont effectivement invariants de jauge. Notre problème d'invariance de jauge vient du fait qu'en calculant l'amplitude de diffusion  $\mathcal{M}(\gamma W^+ W^-)$ , on ne calcule pas une amplitude physique. Pour tenter de remédier à ce problème, je me suis demandé si on pouvait trouver une amplitude physique qui soit formellement proche de l'amplitude  $\mathcal{M}(\gamma W^+ W^-)$ , que l'on pourrait utiliser en lieu et place de  $\mathcal{M}(\gamma W^+ W^-)$  pour le calcul de la fonction de structure. Pour cela, le choix n'est pas unique. On peut par exemple se rapprocher de la situation expérimentale dans laquelle le photon, légèrement virtuel, est émis lors d'une interaction  $e^+ e^-$ . Je n'ai pas étudié ce cas qui à mon avis doit faire intervenir la fonction de structure décrivant le contenu en photon de l'électron, qui est certes bien connu. Dans cette section je propose plutôt de regarder le cas où les  $W$  se couplent à une particule scalaire (ce qui est rendu possible par le fait que

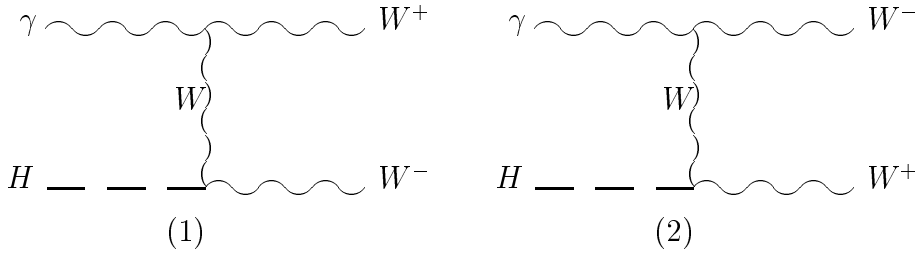
**Fig. 5.4:** Fonctions de structure décrivant le contenu en  $W_T$  dans le photon avec un autre  $W_T$  spectateur (eq. (5.30)). Ici  $\sqrt{s} = 2 \text{ TeV}$ ,  $\cos(\theta)_{min} = 0.707$  ( $45^\circ$ ) correspond aux courbes en traits pleins,  $\cos(\theta)_{min} = 0.9$  correspond aux courbes en tirets, et les courbes en alterné trait-point correspondent à  $\cos(\theta)_{min} = 0.5$ . L'hélicité du photon est droite sur toutes ces figures.



**Fig. 5.5:** Figure du haut: comparaison entre la fonction de structure  $\bar{D}(\tau)$  ( $\cos(\theta)_{\min} = 0.9$ ) et celle de l'eq. (5.18). Figure du bas: fonction de structure  $\bar{D}(\tau)$  (eq. (5.29)) non-intégrée sur l'angle de diffusion du  $W$  spectateur.



le Higgs se couple au  $W$  avec le vertex  $igM_W g_{\mu,\nu}$ , et nous prendrons donc comme exemple une particule de Higgs au repos). L'amplitude du processus  $\gamma H \rightarrow W^+ W^-$  est alors constituée des deux graphes suivants :



Pour que la particule scalaire rajoutée influence peu le vertex  $\gamma W^+ W^-$ , j'ai pris son impulsion de la forme  $(\delta E, \vec{0})$ , où  $\delta E$  est juste l'énergie qu'il faut rajouter au  $W$  off-shell pour qu'il retrouve sa couche de masse. Les polarisations transverses du  $W$  seront donc inchangées mais cela aura une influence sur sa polarisation longitudinale. L'amplitude de ce processus s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} = & i e g M_W \left( \frac{-(\varepsilon_\gamma \cdot p_+)(\bar{\varepsilon}_+ \cdot \bar{\varepsilon}_-) + (p_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_-)(\varepsilon_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_+) - (p_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_+)(\varepsilon_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_-)}{p_+ \cdot p_\gamma} \right. \\
 & \left. + \frac{(\varepsilon_\gamma \cdot p_-)(\bar{\varepsilon}_+ \cdot \bar{\varepsilon}_-) + (p_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_-)(\varepsilon_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_+) - (p_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_+)(\varepsilon_\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_-)}{p_- \cdot p_\gamma} \right) \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

L'expression obtenue (5.31) est en effet très proche (au facteur  $igM_W$  près) de ce que l'on a rencontré dans les calculs précédents, à savoir l'expression du vertex  $\gamma W^+ W^-$  multiplié par le propagateur du  $W^-$  (i.e.  $1/(p_+ \cdot p_\gamma)$ ). Le deuxième graphe est alors censé représenter la contribution des autres graphes que l'on oublie dans le formalisme des fonctions de structure. En fait ce n'est pas tout à fait vrai car ici le calcul de la polarisation des  $W$  est réalisé à partir d'impulsions sur couche de masse alors que précédemment, un des  $W$  était off-shell. Pour les  $W$  transverses

cela ne change rien, mais pour la polarisation longitudinale il faudra faire attention. Si on s'intéresse au contenu en  $W^-$  du photon avec un  $W^+$  spectateur, c'est le premier graphe que nous chercherons à isoler, et il nous faut donc étudier dans quelle mesure le deuxième graphe peut être négligé ou non. Mais en fait je me suis aperçu lors de tests des fonctions de structure tirées à partir de cette amplitude que cette contribution n'est vraiment petite que dans la limite des petits angles de diffusion, ce qui est compatible avec l'idée présentée auparavant comme quoi on doit se limiter aux petites impulsions transverses dans le calcul de la fonction de structure. Dans la pratique j'ai donc éliminé le deuxième graphe qui me semble contenir l'ensemble (ou presque) des contribution dans l'impulsion transverse qui nuisent au calcul de la fonction de structure tel qu'on l'a réalisé au paragraphe précédent.

Avec la prescription choisie pour l'impulsion de la particule scalaire, on peut remarquer aussi que le numérateur des deux graphes sont égaux. Le photon n'ayant en effet pas de polarisation longitudinale, on a  $-(\varepsilon_\gamma \cdot p_+) = -(\varepsilon_\gamma \cdot (p_\gamma + p_H - p_-)) = (\varepsilon_\gamma \cdot p_-)$ . S'il devait donc y avoir des compensations entre graphes à haute énergie elles se feraient donc entre les deux propagateurs (qui sont de signes contraires). Qu'en déduit on? Chaque propagateur contribuant de façon significative dans deux régions *a priori* distinctes de l'espace de phase, on pourra toujours éliminer l'un des deux et l'expression qui nous reste est celle d'un seul graphe<sup>(11)</sup>. Autrement dit, le fait de se contenter de calculer un seul graphe est suffisant pour décrire correctement la désintégration du photon en deux  $W$ , en prenant comme prescription de calcul :

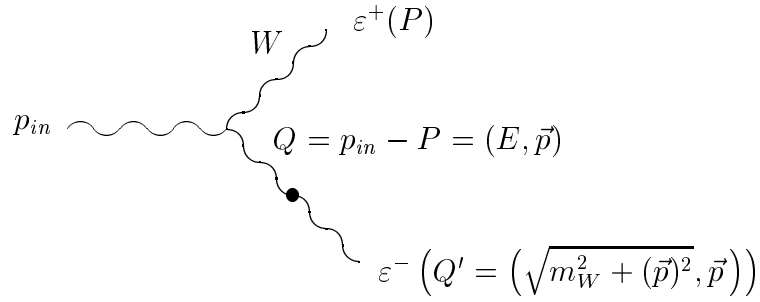
- La conservation de l'énergie impulsion est appliquée de façon exacte au vertex  $\gamma W^+ W^-$  (n'oublions pas que ce vertex est dérivatif et qu'un choix de prescription pour déterminer l'impulsion de la particule virtuelle est déterminant).

---

<sup>(11)</sup> En réalité la contribution du second graphe n'est pas négligeable dans la région de diffusion vers l'avant ( $\cos(\theta) > 0$ ) mais sa contribution relative diminue si on se restreint à un cône angulaire de diffusion de plus en plus petit. Comme les diffusions que nous étudions se font avec de petits angles, le fait d'éliminer le deuxième graphe se justifie, même si le premier graphe est considéré pour des angles allant de 0 à  $\pi/2$  pour rester général (au delà de quelques degrés en pratique les contributions seront négligeables).

- La polarisation de la particule “virtuelle” est calculée à partir d’une impulsion sur couche de masse calculée comme suit :

$$Q = (E, \vec{p}) \rightarrow Q' = \left( E' = \sqrt{m_H^2 + (\vec{p})^2}, \vec{p} \right) \rightarrow \varepsilon_\lambda(Q') \quad (5.32)$$



Cette étude encore en cours de développement montre que pour calculer la fonction de distribution  $\gamma \rightarrow W_T^+ W_T^-$ , on peut utiliser en toute sécurité le graphe  $\gamma \rightarrow W^+ W^-$  en jauge non-linéaire, et le premier graphe du processus  $\gamma H \rightarrow W_T^+ W_T^-$  redonne d’ailleurs exactement la fonction de structure calculée à partir de l’amplitude de  $\gamma W_T^+ W_T^-$  (eq. (5.30)). Par contre l’introduction de  $p_H$  modifie la polarisation longitudinale et les résultats préliminaires de convolution ne semblent pas donner le bon comportement en énergie des sections efficaces, et il semble que certains termes doivent être éliminés du premier graphe.



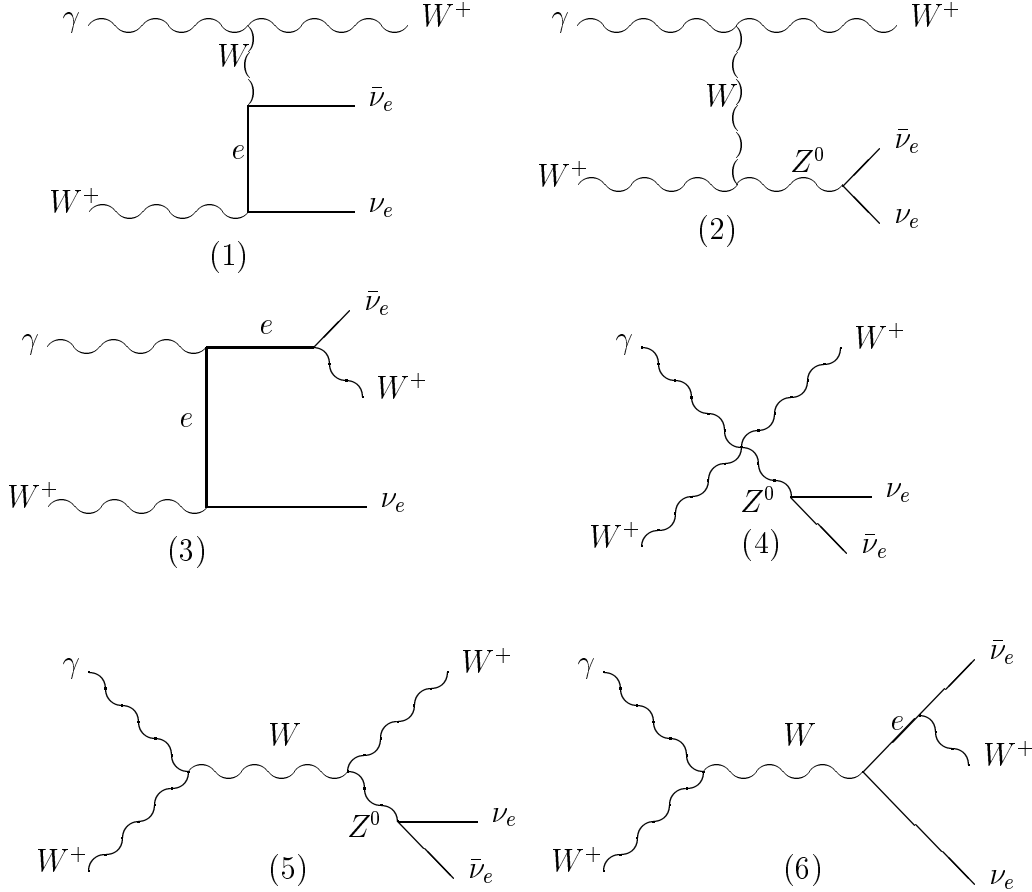
# Chapitre 6

## Quelques tests des fonctions de structure

Pour commencer, nous allons tester des fonctions de structure décrivant le contenu en  $W$  transverse dans le photon. Pour cela nous avons du choisir un processus dans lequel le formalisme de fonction de structure peut s'appliquer (existence d'un sous-processus), et dont le sous-processus est dominé par la contribution des  $W$  transverses. Nous avons finalement choisi  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$  dont on peut extraire comme sous-processus  $W^+ W^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e$  qui est fortement dominé par les  $W$  transverses comme nous le verrons.

### 6.1 Le processus $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$

D'abord examinons les 6 graphes du processus:



Parmi ces 6 graphes, les deux premiers comportent un sous processus ( $W^+W^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$ ) et la présence de deux propagateurs dans la voie “t” nous incite à penser que le premier graphe apporte une contribution dominante à haute énergie. Le fait de considérer en plus le deuxième graphe vient du fait que le processus  $W^+W^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$  est connu depuis longtemps pour les compensations entre ses deux graphes à haute énergie [83, 101]. Le graphe 3 peut être aussi très important car l’électron dans le canal “t” peut être exactement sur sa couche de masse. Si on veut examiner le contenu en  $W_T$  dans le photon, il faudra donc éliminer la contribution du graphe 3, et pour cela nous avons imposé une coupure sur  $Q_e^2 = (p_{W_{in}^+} - p_{\nu_e})^2$ . Notons que cette coupure influence nécessairement un peu les autres graphes, mais cette

influence n'est pas déterminante.

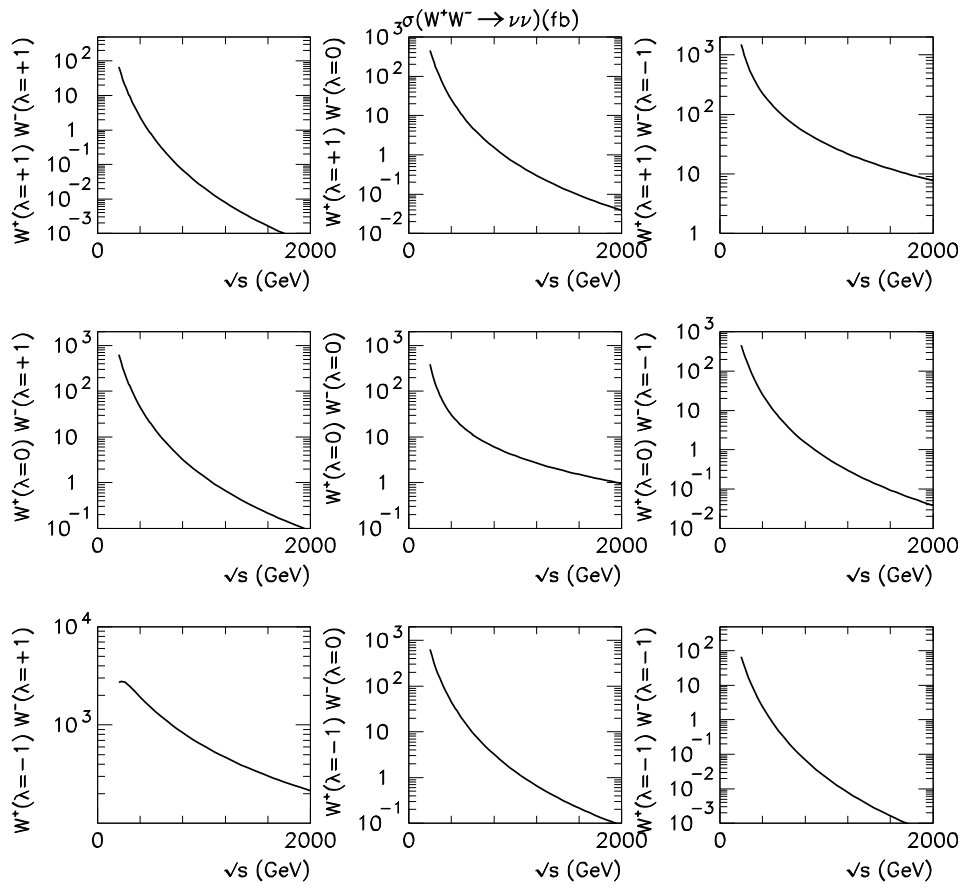
### 6.1.1 Le sous processus $W^+W^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$

Ce sous-processus est intéressant pour sélectionner des  $W$  transverses parce que le terme dominant de la section efficace est dû à l'électron dans le canal  $t$  dont la masse est très petite. Comme on a une paire neutrinos-antineutrinos dans l'état final on a une très forte dominance d'un mode de polarisation particulier qui est  $W^-(\lambda = +1)W^+(\lambda = -1)$ . Ces résultats sont regroupés dans la figure 6.1. Notons qu'une coupure sur  $Q_e^2$  a été effectuée, ce qui diminue certes la section efficace d'un bon facteur 3 mais ne change pas les rapports de force entre les différents modes de polarisation des  $W$ . Nous avons vu que cette coupure est destinée à s'affranchir de la contribution du graphe 3 du processus  $\gamma W^+ \rightarrow W^+\nu_e\bar{\nu}_e$ , mais cette coupure s'applique dans les mêmes conditions sur l'électron virtuel dans le graphe 1, autrement dit sur l'électron virtuel dans le sous-processus. C'est pour cette raison que l'on doit répercuter cette coupure dans le sous-processus. En n'appliquant pas cette coupure, on devrait normalement faire intervenir la "fonction de structure" qui décrit le contenu en électron du  $W$ , autrement dit sa largeur en  $e^-\bar{\nu}_e$ .

### 6.1.2 Du résultat exact aux approximations

Dans les figures 6.2 et 6.3 sont représentées les sections efficaces des différents modes de polarisation. Pour obtenir les résultats exacts, j'ai calculé l'amplitude exacte en utilisant les règles de Feynman présentées dans l'annexe B, en gardant la possibilité de modifier les paramètres de jauge. J'ai pu ainsi réaliser les calculs en

**Fig. 6.1:** Section efficace du sous-processus, avec la coupure  $|Q_e^2| > m_W^2$  sur la virtualité de l'électron.



jauge unitaire et en jauge non-linéaire ( $\alpha = \xi = 1$ ). Les courbes en trait plein sont les sections efficaces exactes, en alterné trait-points la contribution des 2 graphes incluant le sous processus, sur la courbe pointillée partielle la partie longitudinale du propagateur du  $W$  ( $Q^\mu Q^\nu / M_W^2$ ) est éliminée (pour tester son influence). A ce stade on peut d'abord se demander s'il n'est pas un peu hardi de calculer une section efficace en ne considérant que deux graphes qui ne sont pas invariants de jauge. C'est pourquoi il faut préciser que j'ai utilisé pour faire ces calculs les considérations de Bell [23] qui précise que les compensations entre graphes n'existent plus si on calcule en jauge unitaire et qu'on utilise pour les modes longitudinaux la “ruse” de Veltman (qui consiste à retirer au vecteur de polarisation  $p^\mu / M_W$  de façon à obtenir un vecteur dont les composantes tendent vers 0 à haute énergie)<sup>(1)</sup>.

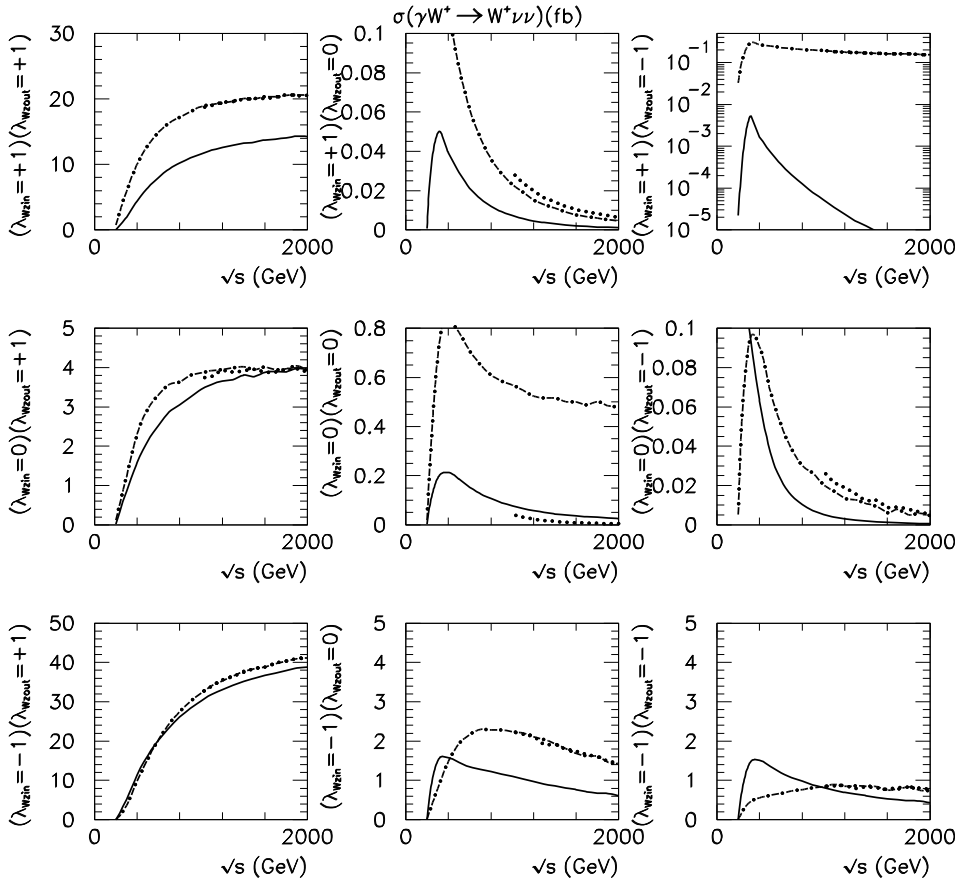
La première remarque à faire sans doute c'est que lorsque le photon ne transmet pas son hélicité au  $W$  spectateur, les approximations successives fonctionnent moins voire pas du tout.

Une vérification utile avant d'aller plus loin consiste à étudier l'influence de la coupure sur la virtualité de l'électron, pour être sûr que celle-ci ne “détériore” pas la distribution en  $Q_W^2$  qui est le point clef de l'approximation en terme de fonctions de structure. Sur la figure 6.4 on constate qu'un rétrécissement important de la coupure ne déforme pas énormément la forme de la distribution de  $-Q_W^2/s$ .

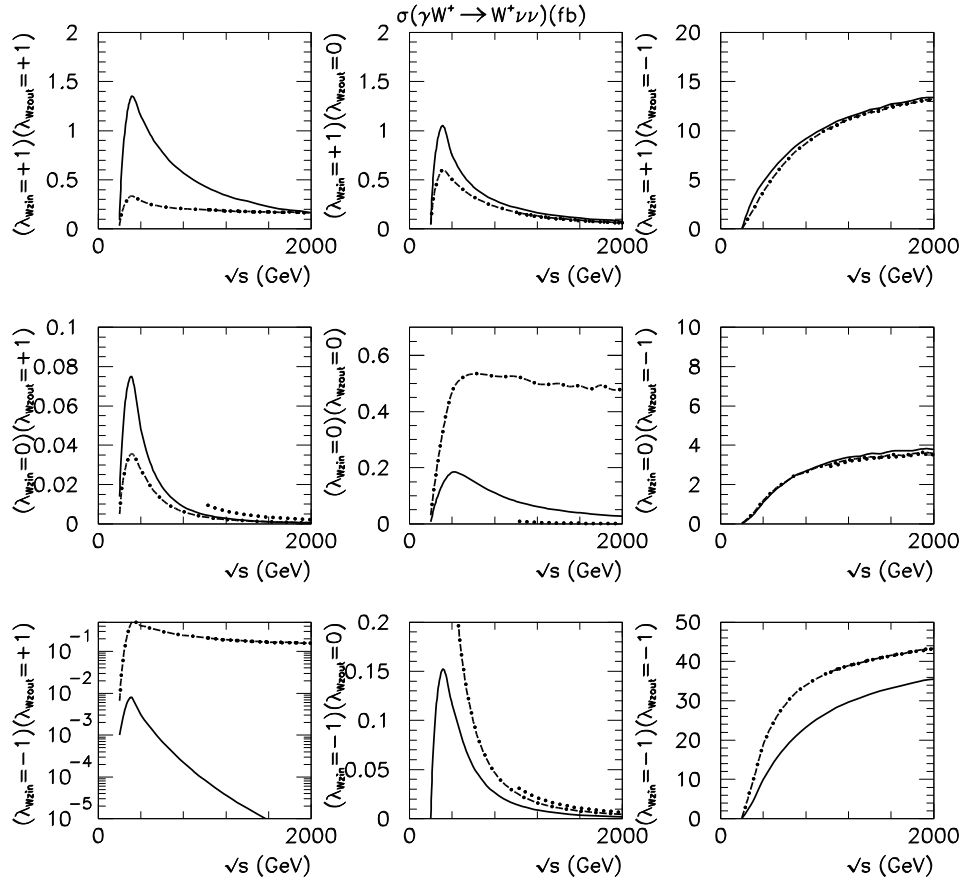
---

<sup>(1)</sup>La démonstration de Bell repose sur l'utilisation des variables de Stueckelberg (transformation non-linéaire des champs, voir [102, 17]), et le théorème de Coleman-Wess-Zumino [103] qui assure l'invariance des éléments de la matrice  $S$  (à l'arbre) dans cette transformation.

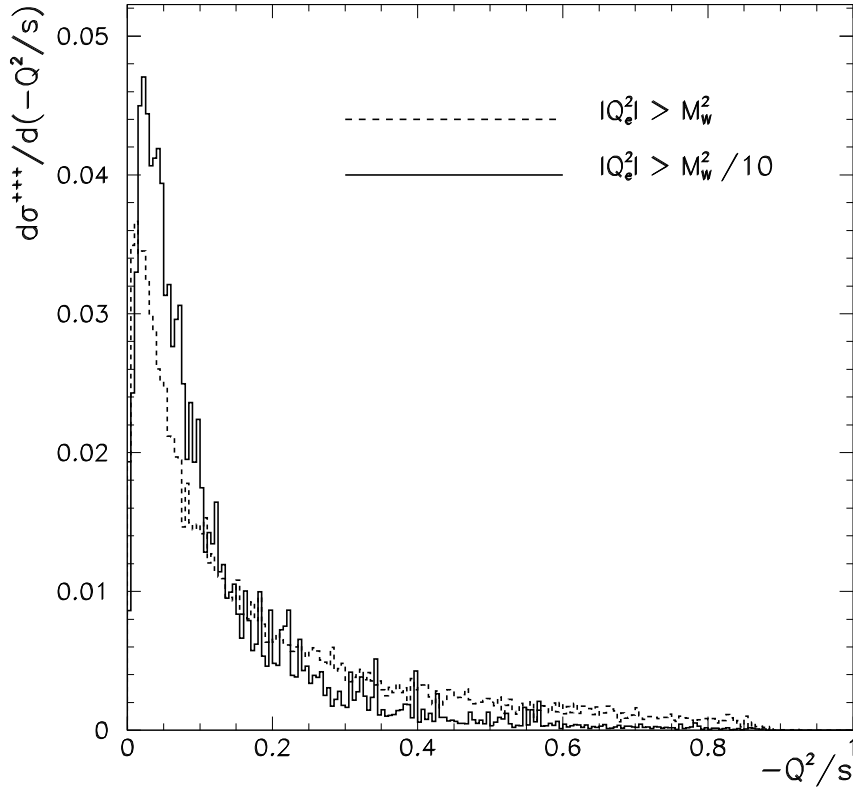
**Fig. 6.2:** Section efficace du processus  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$ . Il a été imposé les coupures  $|Q_{electron\ virtual}^2| > m_W^2$  et  $|(p_\nu + p_{\bar{\nu}})^2 - m_Z^2| > m_W^2$ . Le photon a l'hélicité droite sur cette figure. La courbe en trait plein représente la section efficace exacte. La courbe alternée traits-points représente le calcul en jauge unitaire (avec l'astuce de Veltman pour les longitudinaux) des graphes (1) et (2). Sur la courbe en pointillé on a de plus éliminé les termes  $k^\mu k^\nu / M_W^2$  des propagateurs (par rapport à l'approximation précédente).



**Fig. 6.3:** Section efficace du processus  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$ . Il a été imposé les coupures  $|Q_{electron\ virtuel}^2| > m_W^2$  et  $|(p_\nu + p_{\bar{\nu}})^2 - m_Z^2| > m_W^2$ . Le photon a l'hélicité gauche sur cette figure. Mêmes conventions que sur la figure précédente.

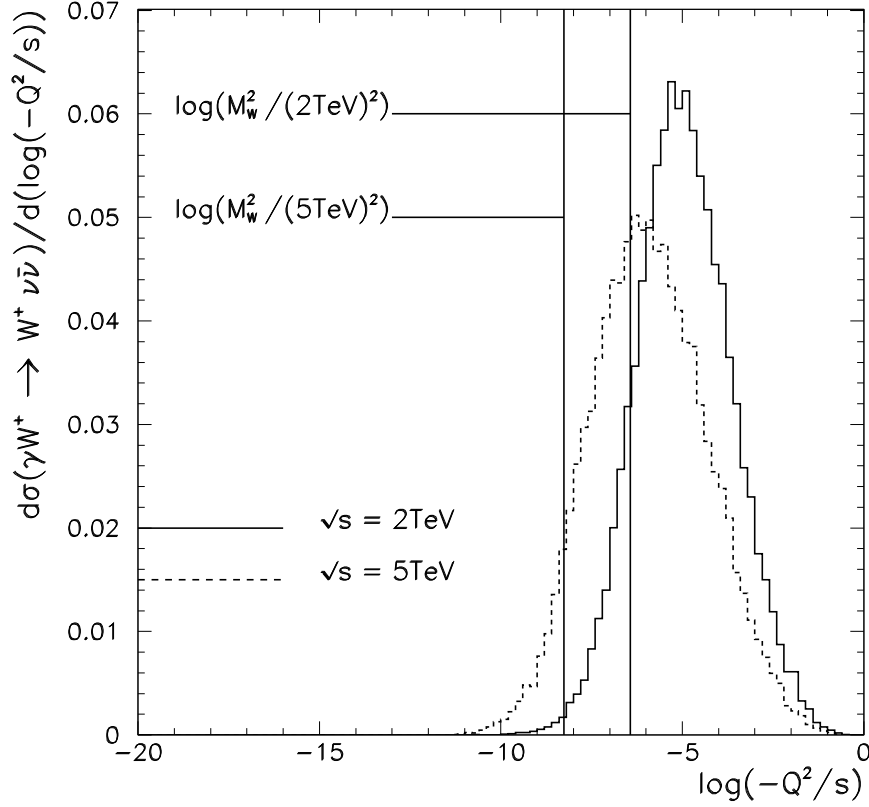


**Fig. 6.4:** Comparaison pour deux coupures très différentes sur la virtualité de l'électron, de la distribution en  $Q_{W^{virtuel}}^2$  (à partir de l'amplitude exacte, les trois bosons vecteurs ayant l'hélicité droite). Les intégrales des deux courbes ont été normalisées à 1 car bien entendu, une coupure plus petite implique une plus grande section efficace différentielle.





**Fig. 6.5:** Ordres de grandeurs de  $Q^2$  impliqué dans la réaction  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$ .



Regardons un peu plus en détail les ordres de grandeur de  $Q_W^2$  impliqués dans ce processus, et plus précisément la distribution en  $\log(-Q^2/s)$  qui montre de façon plus nette cet ordre de grandeur que sur une échelle linéaire (voir figure 6.5).

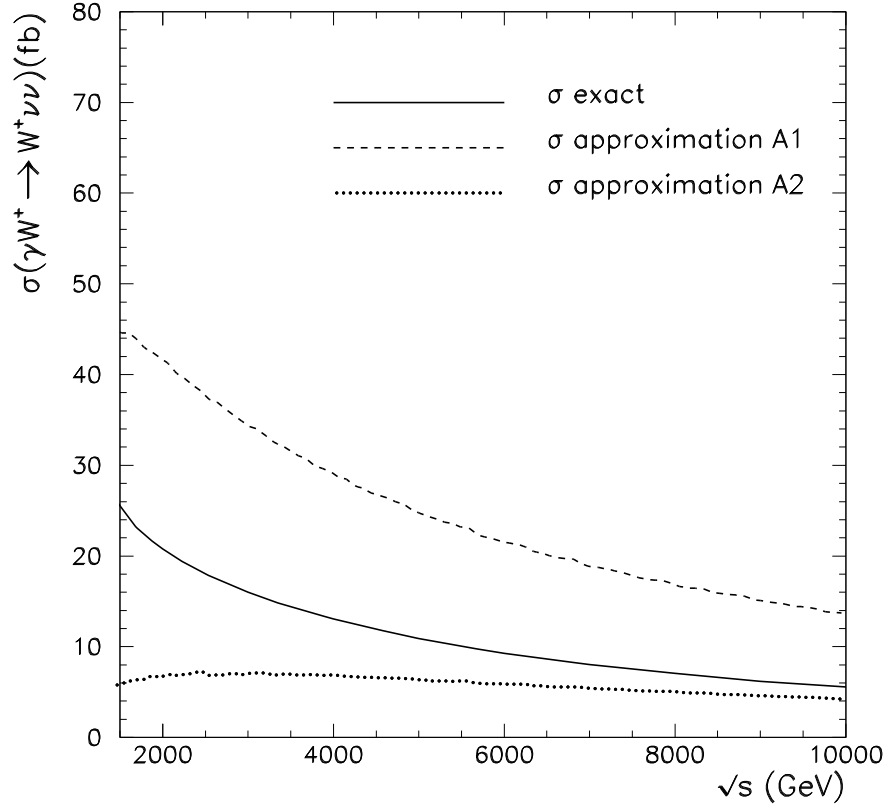
On s'aperçoit sur cette figure que la valeur moyenne du  $Q^2$  impliqué est nettement supérieure à  $M_W^2$  mais pas dramatiquement (facteur  $\sim 3$ ). Et lorsque nous avons testé nos fonctions de structure sur ce processus sans faire d'autre hypothèse, on obtient un résultat complètement faux. Les sections efficaces obtenues après convolution ont en effet une dépendance en  $\sqrt{s}^2$  qui ne peut pas reproduire une section

efficace physique. Il nous faut restreindre le champ d'application des fonctions de structure, et pour cela rajoutons une hypothèse : l'approximation ne peut fonctionner que si le  $W$  virtuel possède une fraction non négligeable d'énergie (i.e. par rapport à  $M_W$ ). J'ai donc imposé une coupure sur la masse invariante émise par le sous-processus  $\tau > 0.01$ , autrement dit le sous processus doit avoir au moins 10% de l'énergie totale. Dans ce cas ci on a pu constater un bon accord entre les données du programme Monte-Carlo que j'ai construit et deux approximations de fonctions de structure. La première approximation consiste à brutalement calculer le vertex  $\gamma W^+ W^-$  off-shell et à mettre la masse du  $W$  à 0 (approximation A1 vue précédemment eq. (5.20)). La deuxième (A2) repose sur l'utilisation du processus invariant de jauge  $\gamma H \rightarrow W^+ W^-$  dans lequel le propagateur inintéressant a été retiré. En pratique ce propagateur contribue de façon non négligeable si on ne se restreint pas aux petits angles de diffusion. Les résultats sont indiqués sur la figure 6.6. Ces résultats inédits semblent encourageants.

## 6.2 Le processus $\gamma W^+ \rightarrow W^+ H H$

La motivation pour l'étude de ce processus est de tester les fonctions de structure concernant la production de  $W$  longitudinal. Nous allons en effet montrer ici que pour le sous processus  $W^+ W^- \rightarrow H H$ , le mode de polarisation  $LL$  est très largement dominant et que la section efficace atteint très rapidement un plateau ( $\sigma(W_L^+ W_L^- \rightarrow H H) \sim 47.5 \text{ pb}$ ).

**Fig. 6.6:** Comparaison entre la section efficace exacte de  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$  et les deux approximations A1 (eq. (5.20) en imposant  $\tilde{p}_T < \min(z, 0.141)$ ) et A2 (eq. (5.30) avec  $\cos(\theta)_{\min} = 0.99$ ). Les coupures ont été choisies de façon à être comparables, i.e.  $0.99 \simeq \cos(8^\circ)$ ,  $0.141 \simeq \sin(8^\circ)$ .



### 6.2.1 $W^+W^- \rightarrow HH$

Avant toute chose, regardons en détails le sous-processus qui nous intéresse. L'amplitude  $W_L W_L \rightarrow HH$  a déjà été calculée [104] et je l'ai recalculée en laissant la possibilité au couplage anormal  $h_3$  d'être différent de 1 (afin de pouvoir par la suite utiliser l'approximation des fonctions de structure pour reprendre l'étude du couplage  $H^3$ , voir chapitre suivant et la figure 4.20). Dans la suite, nous avons pris pour notations :  $\beta_{W,H} = \sqrt{1 - 4M_{W,H}^2/s}$ ,  $r = M_H^2/M_W^2$ ,  $x_0 = (1 + \beta_H^2)/2\beta_W\beta_H$  et  $x$  est le cosinus de l'angle de diffusion  $\theta$  :  $x = \cos \theta$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_{LL} = & \frac{g^2}{2} \left\{ \frac{1}{\beta_H \beta_W^3} \left( \frac{1}{x - x_0} - \frac{1}{x + x_0} \right) \left( r \frac{M_H^2}{s} + \beta_H^2 + \beta_W^4 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta_W^2} (2 - \beta_W^2 - r) + \frac{3h_3 r}{4} \left( \frac{1 + \beta_W^2}{1 - M_H^2/s} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_{+L} &= \frac{g^2}{4\beta_W^2} \sqrt{\frac{2M_W^2}{s}} \sin \theta \left( \frac{1}{x - x_0} + \frac{1}{x + x_0} \right) (r - 2) \\ \tilde{\mathcal{M}}_{+-} &= g^2 \frac{\beta_H}{4\beta_W} \sin^2 \theta \left( \frac{1}{x - x_0} - \frac{1}{x + x_0} \right) \\ \tilde{\mathcal{M}}_{++} &= g^2 \left\{ \frac{1}{\beta_H \beta_W^3} \left( (2\beta_W^2 - \beta_H^2) \frac{M_W^2}{s} - \left( \frac{M_H^2}{s} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{x - x_0} - \frac{1}{x + x_0} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\beta_W^2 - \beta_H^2 - 1}{4\beta_W^2} + \frac{3h_3}{2} \frac{M_H^2}{s} \left( \frac{1}{1 - M_H^2/s} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

La figure 6.7 montre que la contribution principale à la section efficace provient des  $W$  longitudinaux, et la section efficace tend rapidement vers une limite asymptotique qui ne dépend pas de la masse du Higgs (voir aussi fig. 6.8).

$$\begin{aligned}
\sigma_{LL} & \xrightarrow{s \gg M_H^2, M_W^2} \sigma_\infty \equiv \frac{\pi \alpha^2}{s_W^4} \frac{1}{4M_W^2} \\
\sigma_{TL} & \xrightarrow{s \gg M_H^2, M_W^2} \frac{M_W^2}{2s} \frac{M_H^2 - 2M_W^2}{s} \left( \ln(s/M_W^2) - 3 \right) \sigma_\infty \\
\sigma_{TT} & \xrightarrow{s \gg M_H^2, M_W^2} \frac{M_W^2}{4s} \sigma_\infty
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Même avec une coupure sur l'angle de diffusion ( $\cos(\theta) > \cos(\theta)_{min}$ ) la section efficace  $W_L W_L \rightarrow H H$  reste dominante (voir fig. 6.7).

$$\sigma_{LL} \simeq \sigma_0 \omega \left[ \frac{(2 + h_3 r)^2}{8} + h_3 r \ln\left(\frac{\omega + c}{2}\right) + \frac{2}{c + \omega} \right] \tag{6.4}$$

$$\sigma_{TL} \simeq \sigma \omega^2 \frac{(r - 2)^2}{4} \left[ -3 + \frac{c}{c + \omega} - \ln\left(\frac{\omega + c}{2}\right) \right] \tag{6.5}$$

$$\sigma_{TT} \simeq \frac{\sigma_0 \omega}{2} \tag{6.6}$$

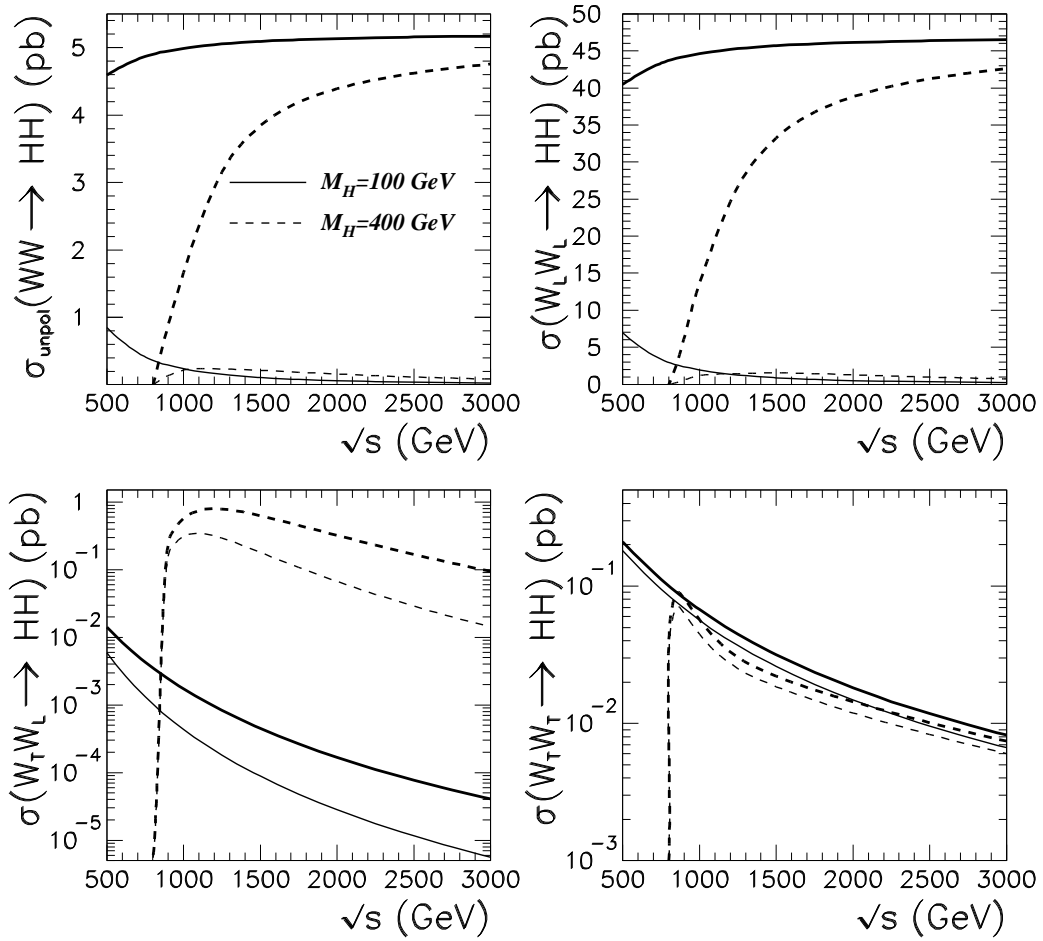
$$\text{avec } \sigma_0 = \frac{g^4}{128\pi m_W^2} \simeq 23.4 \text{ pb}, \quad c = \cos(\theta_{min}^H), \quad \omega = 2M_W^2/s, \quad r = M_H^2/M_W^2.$$

### 6.2.2 Comparaison entre résultats exacts et approximés.

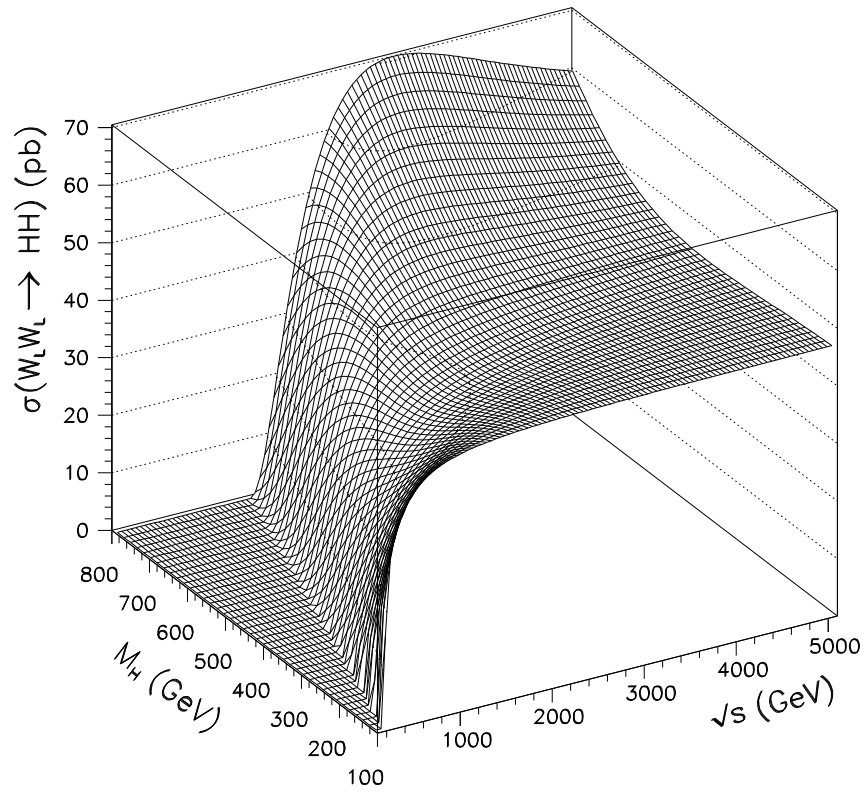
Les six graphes qui décrivent le processus  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ H H$  en jauge unitaire sont représentés sur la figure 6.9.

En utilisant le logiciel CompHEP j'ai pu obtenir la courbe de section efficace exacte représentée figure 6.10. Sur cette figure sont aussi représentés les résultats

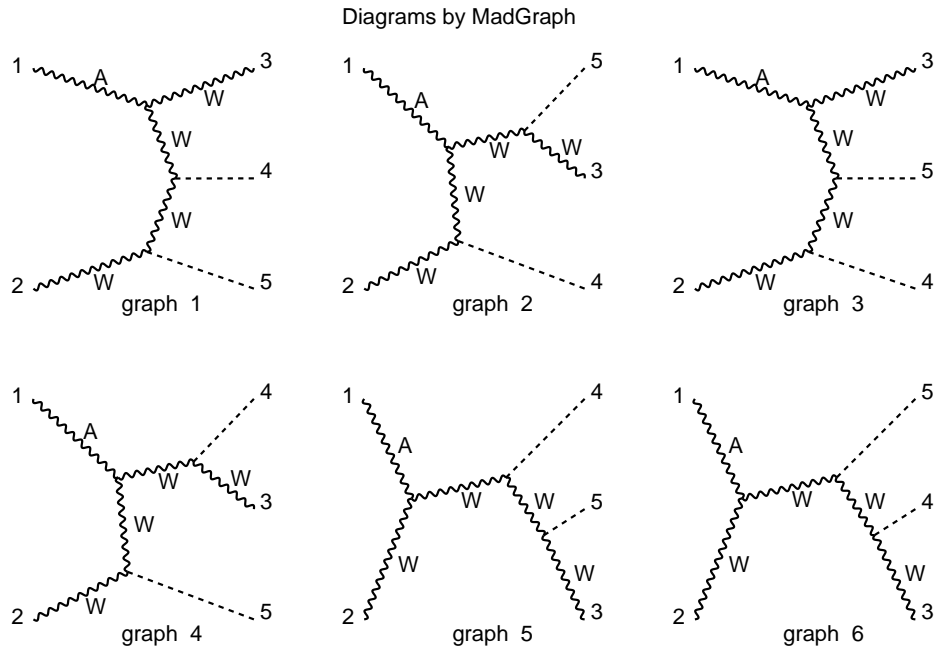
**Fig. 6.7:** Section efficace de  $W^+W^- \rightarrow HH$  en fonction de l'énergie. Les lignes foncées correspondent à la section efficace sans coupure alors que les lignes fines correspondent à une coupure sur l'angle de diffusion ( $|\cos(\theta)| < 0.8$ ).



**Fig. 6.8:** *Section efficace de  $W_L^+ W_L^- \rightarrow HH$  en fonction de l'énergie et de la masse du Higgs.*



**Fig. 6.9:** Graphes du processus  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ H H$ .





obtenus en utilisant des fonctions de structure (eq. (5.18) et eq. (5.19)). Le premier test a été bien sûr d'essayer la fonction de structure (eq. (5.18)) que nous avons aussi utilisé pour l'étude de  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ , dont nous étudions ici un sous processus en fait (voir chapitre suivant). Considérons donc le calcul naïf de la section efficace comme étant la convolution de notre fonction de structure avec la section efficace du sous processus  $W^+W^- \rightarrow HH$  que nous assimilerons à la constante  $\sigma_\infty^{LL}$ . Ce calcul donne :

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma_{unpol}W_{unpol}^+ \rightarrow W_T^+HH) &\simeq \frac{\alpha}{3\pi} \int_{z_0}^1 dz \frac{1-z}{z} \sigma_\infty^{LL} \\
&= \frac{\alpha\sigma_\infty^{LL}}{3\pi} (-1 + z_0 - \ln(z_0)) \\
&\simeq \frac{2\alpha\sigma_\infty^{LL}}{3\pi} \left( \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s_0}}\right) - \frac{1}{2} \right) \quad (6.7)
\end{aligned}$$

Le facteur 3 au dénominateur est dû à la moyenne prise sur la polarisation du  $W$  entrant. Rappelons que la fonction de structure utilisée ici ( $\frac{\alpha}{\pi} \frac{1-z}{z}$ ) donne la probabilité qu'un photon non-polarisé émette un  $W$  longitudinal virtuel (celui qui déclenche le sous processus) et un  $W$  spectateur transverse de polarisation quelconque. On a utilisé dans ces équations que  $z_0 = s_0/s$  où  $s_0$  est le carré de l'énergie de seuil à laquelle se déclenche la réaction  $W^+W^- \rightarrow HH$ . La sensibilité de la section efficace vis à vis de cette constante est assez importante car l'approximation des fonctions de structure est plus grossière près du seuil. On peut néanmoins comparer le coefficient du  $\log$  avec le résultat d'un fit des points exacts donnés par le logiciel CompHEP. Un fit à deux paramètres  $a \ln(\sqrt{s}) + b$  donne comme résultat avec une assez bonne précision  $95(fb) * (\log(\sqrt{s}/(1 GeV)) - 6.63)$  pour  $M_H = 100 GeV$  avec comme indiqué une incertitude sur le dernier chiffre significatif<sup>(2)</sup>, et  $110(fb) * (\log(\sqrt{s}/(1 GeV)) - 7.65)$  pour  $M_H = 400 GeV$ . Par comparaison, le coefficient du  $\log$  qui vaut  $\frac{2\alpha\sigma_\infty^{LL}}{3\pi} \simeq 94(fb)$  en prenant pour  $\sigma_\infty^{LL} \simeq 56(pb)$ , et pour la constante dans la parenthèse on obtient  $-6.5$  ( $M_H = 400 GeV$ ) au

---

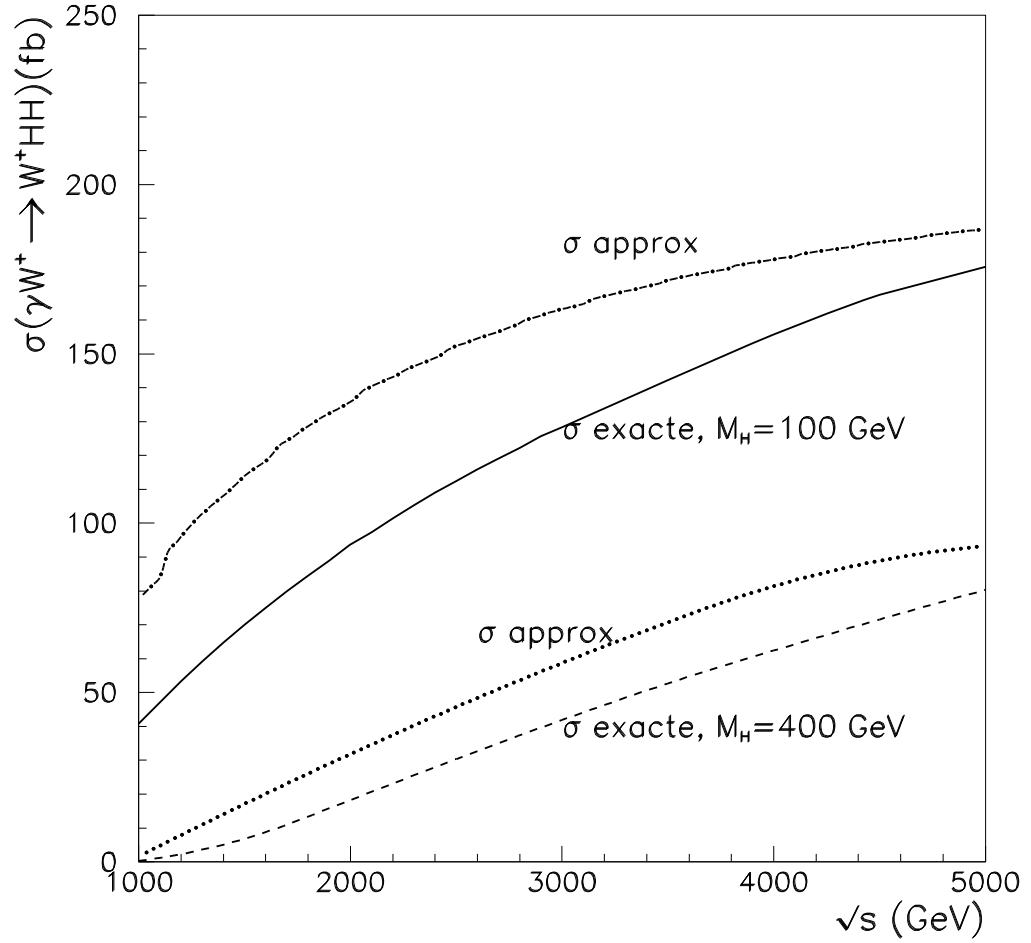
<sup>(2)</sup>Le fit a été réalisé en prenant 11 points entre 2  $TeV$  et 3  $TeV$ .

lieu de  $-7.65$ . Ce résultat dépasse largement mes espérances et la conclusion de ce calcul élémentaire est qu'un bon accord est obtenu, mais certainement pas un accord parfait. Il faut tempérer en gardant à l'esprit la simplicité du calcul entrepris aussi bien que les incertitudes du fit. Toutefois par rapport à l'exemple précédent ( $\gamma W^+ \rightarrow W^+ \nu_e \bar{\nu}_e$ ) on n'a pas eu besoin d'imposer la moindre coupure. La différence essentielle est qu'ici on s'attend à ce que le  $W$  interne soit longitudinal alors que dans le cas précédent il était plutôt transverse. D'ailleurs la virtualité pour le longitudinal est plus petite que pour le  $W$  transverse, comme le montre la figure 6.11 par comparaison avec la figure 6.5. C'est sans doute une première explication au fait que l'approximation de fonction de structure fonctionne assez bien pour les  $W$  longitudinaux.

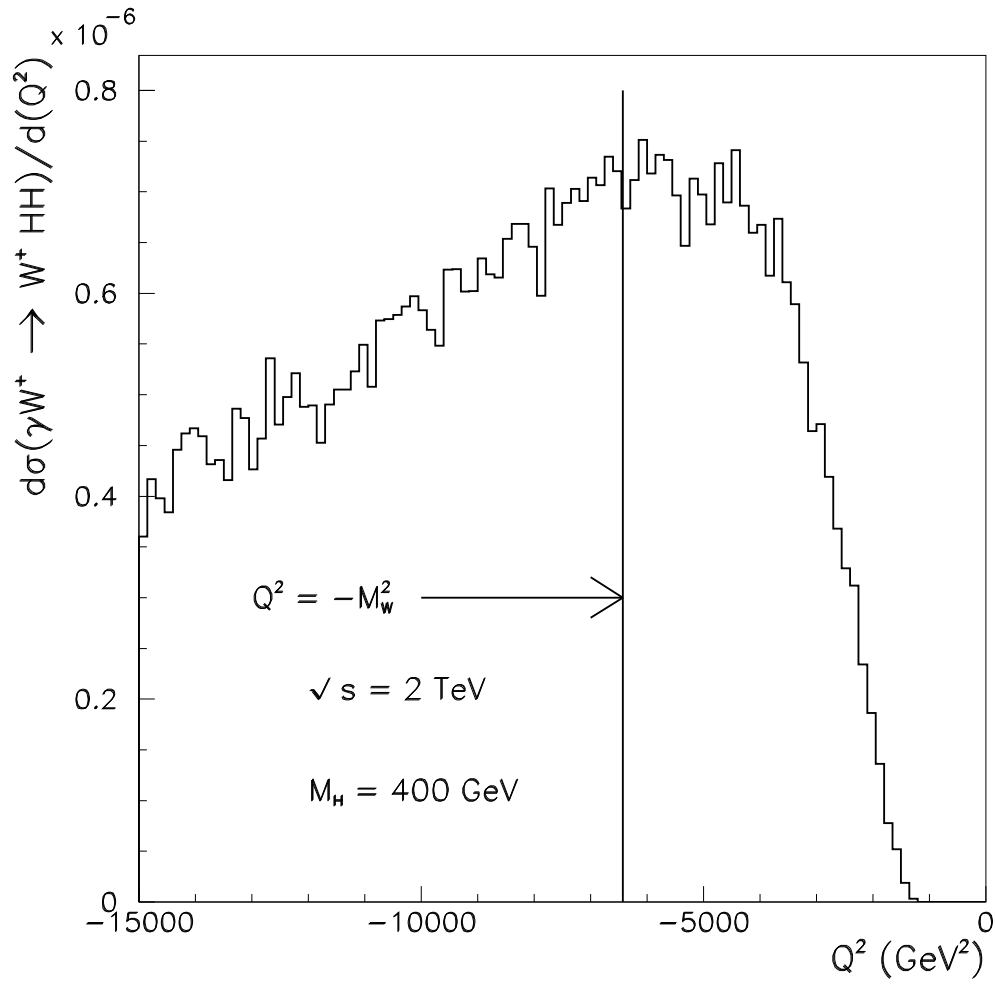
Pour tester un processus similaire, regardons maintenant  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ H \rightarrow W^+ t\bar{t}$  (calculé avec CompHEP). On a choisi de prendre des quarks top dans l'état final de façon à avoir des sections efficaces "raisonnables" mais en fait un  $u$  aurait aussi bien fait l'affaire pour le problème ici posé, puisque le couplage  $H q\bar{q}$  est un simple coefficient de proportionnalité (proportionnel à  $m_q$ ). Le sous processus  $W^+ W^- \rightarrow H \rightarrow t\bar{t}$  a encore une fois une section efficace qui tend vers une valeur asymptotique  $\sigma_\infty^{LL} \simeq 383(pb)$ . Le coefficient du log vaut  $\frac{2\alpha\sigma_\infty^{LL}}{3\pi} \simeq 593(fb)$  et la constante  $-6.35$ , à comparer avec le résultat du fit qui donne  $620 * (\log(\sqrt{s}/1 GeV) - 6.7)$ . On constate encore dans ce cas un bon accord sur le comportement asymptotique.

Jusqu'ici nous avons donc réalisé un certain nombre de tests de fonctions de structure, et nous avons montré que celles qui existent déjà dans la littérature sont assez pertinentes. De nouvelles expressions sont prometteuses (eq. (5.30)) et vont être

**Fig. 6.10:** Section efficace du processus  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ H H$ . Dans l'approximation on a tenu compte du cas où le  $W$  sortant est transverse combiné avec le cas où il est longitudinal ( $Q_p^2 = \tau s/4$  dans (5.19)). La convolution a été effectuée avec la section efficace exacte de  $W^+ W^- \rightarrow H H$  donnée par le logiciel CompHEP.



**Fig. 6.11:**  $Q^2$  du  $W$  interne dans  $\gamma W^+ \rightarrow W^+ H H$  (CompHEP 3.2).



encore étudiées dans l'avenir, et tout spécialement les fonctions de distribution des  $W$  longitudinaux dans le photon. Comme je l'annonçais précédemment, je vais maintenant m'intéresser au cas où deux désintégrations initiales se produisent avant qu'il y ait fusion des sous-produits de désintégration. En particulier nous allons regarder si le formalisme des fonctions de structure permet de reproduire des processus dominés par la fusion de  $W$  longitudinaux (mode privilégié de production de bosons de Higgs).



# Chapitre 7

## Application des nouvelles méthodes à la double convolution

### 7.1 Reparamétrage de l'espace des phases

Maintenant que nous avons testé un certain nombre de fonctions de structure sur des processus n'impliquant qu'une seule convolution, nous allons tester ici les fonctions de structure “anciennes” (eq. (5.18) et eq. (5.19)) sur des processus qui en impliquent deux. Comme ici nous nous intéressons à des  $W$  virtuels qui sont longitudinaux, on sait par ce qui a été vu dans les paragraphes précédents que cela risque de fonctionner mieux que si l'on avait affaire à des  $W$  transverses. Dans cette section, nous allons détailler un peu la cinématique du problème qui est plus riche que lorsque nous étudions des processus de type “profondément inélastiques” (voir figure 5.1).

Commençons d'abord par distinguer un cas particulier, celui où l'on n'a que trois particules dans l'état final. Si je distingue cette situation, c'est parce que

l'espace de phase du sous-processus (fusion de deux particules en une) est contraint dans ce cas par les variables cinématiques décrivant les désintégrations initiales. La simple conservation de l'impulsion détermine complètement l'impulsion de la particule résultant de la fusion, une fois données les impulsions des deux particules spectatrices issues des désintégrations primaires. De sorte que l'espace de phase du sous-processus, si on devait l'écrire, serait constitué d'une fonction delta de Dirac qui force cette particule à être sur sa couche de masse. Par contre, si l'on a au moins 4 particules dans l'état final, on a suffisamment de degrés de libertés cinématiques pour pouvoir découpler l'espace de phase du sous-processus de la cinématique des désintégrations primaires. Je vais donc dans un premier temps rappeler brièvement les travaux de Cahn et Dawson[98] sur le cas de trois particules dans l'état final<sup>(1)</sup>. Une section efficace générique peut formellement s'écrire :

$$\begin{aligned} d\sigma &= Cste \times \int d\eta d\zeta \frac{J(\eta, \zeta, m_i, \sqrt{s})}{\eta\zeta} d\sigma_{sub-process} \\ &\simeq \int D(\eta) \int D(\zeta) d\sigma_{sub}(\hat{s} = f(\eta, \zeta)) \end{aligned}$$

où  $\eta$  et  $\zeta$  sont les fractions d'énergie emportées par les quarks spectateurs (cas d'un processus du type  $q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q'_2 H$ ), et nous verrons plus loin comment est défini  $\sigma_{sub}$ .

Pour séparer les contributions dues à chacun des quarks incidents, on cherche à approximer la fonction  $J(\eta, \zeta) = f(\eta)f(\zeta)$ . Pour cela, on peut s'intéresser aux corrélations  $C(\eta, \zeta) = J(\eta, \zeta) - \sqrt{J(\eta, \eta)J(\zeta, \zeta)}$  et regarder si dans la région de l'espace de phase qui contribue le plus à la section efficace, ces corrélations sont petites.

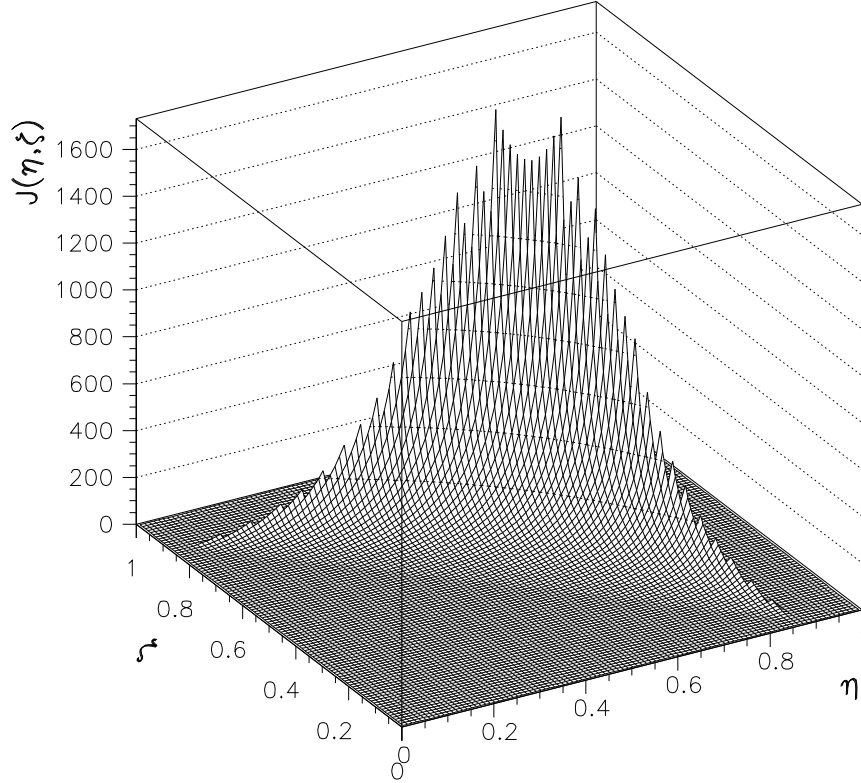
Cette fonction  $J(\eta, \zeta)$  est représentée sur la figure 7.1, et sur la figure 7.2 on a

---

<sup>(1)</sup>En l'occurrence il s'agissait de regarder la production d'un boson de Higgs lourd par fusion de  $W$  longitudinaux (produits par des quarks légers en vue de l'application à LHC).



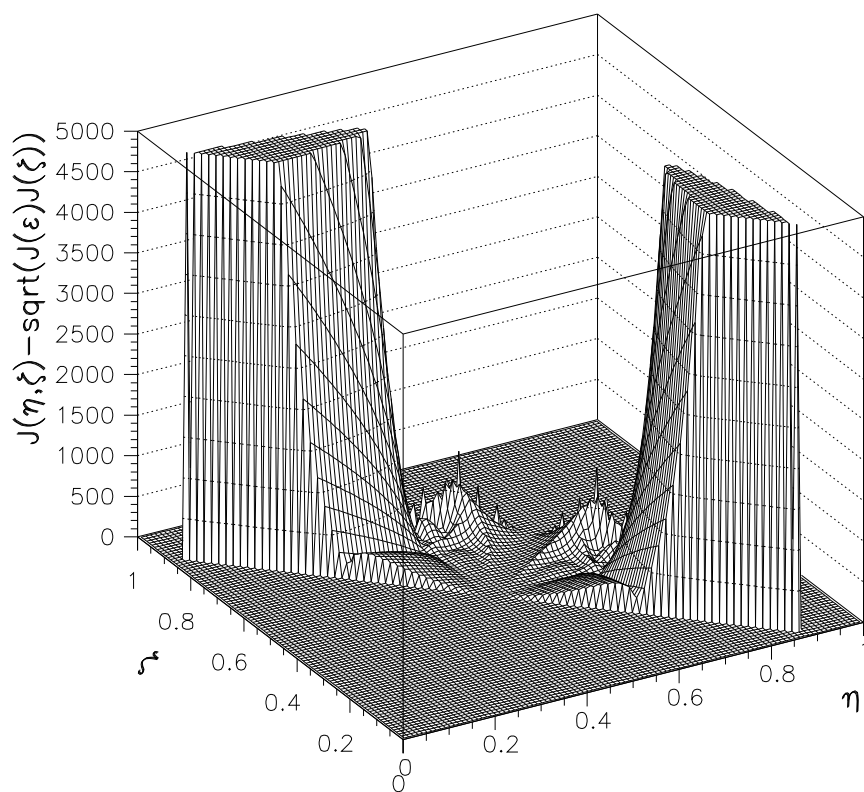
**Fig. 7.1:** Noyau de convolution dans l'espace de phase. La fonction est définie sur un ensemble de Dalitz.



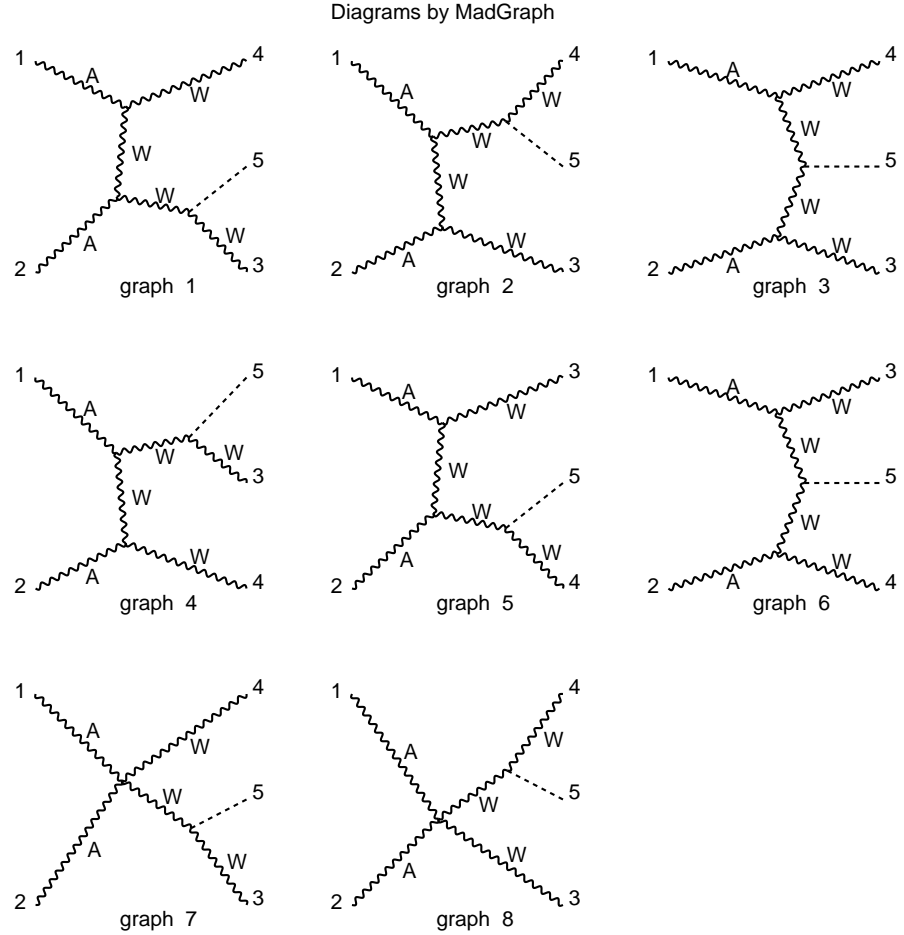
représenté les corrélations entre paramètres  $C(\eta, \zeta)$ .

Cette estimation numérique des corrélations entre les deux quarks incidents nous montre qu'excepté le cas où les fractions d'énergie transmises sont très différentes, on peut faire l'approximation  $J(\eta, \zeta) \simeq \sqrt{J(\eta, \eta)}\sqrt{J(\zeta, \zeta)}$ , autrement dit factoriser l'espace de phase. Comme la région qui contribue le plus est justement la région où  $\eta \simeq \zeta$ , cette factorisation est une assez bonne approximation. Pour ce qui est de la factorisation de l'amplitude, la situation est en fait similaire à celle que nous avons vu précédemment dans le cas où une seule désintégration primaire est considérée. Il y a toutefois une subtilité dans la mesure où le sous-processus n'a pas une section

**Fig. 7.2:** Corrélations entre les paramètres du noyau de convolution dans l'espace de phase.



**Fig. 7.3:** Graphes du processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$  en jauge unitaire.



efficace définie dans le sens usuel du terme puisque son espace de phase comprend moins de 2 particules. Pour voir comment s'en sortir, regardons un peu le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$  (voir figure 7.3).

Le sous processus est constitué de la fusion de deux  $W$  (longitudinaux essentiellement) en un boson de Higgs. Mais après tout, le Higgs n'est pas détectable directement et s'il est de masse intermédiaire ( $\sim 100 \text{ GeV}$ ), son identification est

obtenue en cherchant deux jets de quarks  $b^{(2)}$ . Le processus ci dessus peut donc être assimilé à un sous-processus de  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H \rightarrow W^+W^-b\bar{b}$  et pour simplifier le problème, nous allons supposer ici que les quarks  $b$  ne se couplent qu'au boson de Higgs<sup>(3)</sup>. En utilisant le fait que la résonnance du Higgs est très étroite, on peut assimiler son propagateur à une fonction  $\delta$  de Dirac grâce à laquelle on peut factoriser l'espace des phases (voir annexe D). On obtient pour résumer :

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H) &= \sigma(\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H \rightarrow W^+W^-b\bar{b}) \\
&= \int d\tau \mathcal{L}(\tau) \sigma_{(W^+W^- \rightarrow b\bar{b})}(\sqrt{\tau s}) \\
&= \mathcal{L}(M_H^2/s) \frac{2\alpha\pi^2 M_H^2}{\sin^2(\theta_W) M_W^2 s} \times \frac{1 - 2M_W^2/M_H^2}{\sqrt{1 - 4M_W^2/M_H^2}} \quad (7.1)
\end{aligned}$$

Le sous processus considéré sera donc dans ce cas  $W^+W^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$  que nous devons calculer sur le pic du Higgs (supposé étroit) et ce qui suppose que la masse du Higgs soit supérieure à deux fois la masse des  $W$ . Remarquons que la factorisation de l'espace de phase est tout autant valable si  $M_H < 2M_W$  et il est peut-être possible de généraliser la définition de la section efficace du sous-processus de façon à conserver la validité du formalisme de fonction de structure pour les petites masses de Higgs. Cette généralisation consisterait ici par exemple à considérer les  $W$  de masse nulle pour calculer l'énergie dans le centre de masse, mais à conserver la masse du  $W$  dans le calcul des polarisations (rappelons que le couplage  $H \leftrightarrow W^+W^-$  vaut  $igM_W(\varepsilon^+ \cdot \varepsilon^-)$ ). On ne calcule alors pas réellement la section efficace du sous-processus, ce n'est qu'une tentative de généralisation du formalisme. Toutefois, l'approximation des fonctions de structure devrait fonctionner mieux pour

---

<sup>(2)</sup>Rappelons que pour  $M_H < 2M_W$  le mode de désintégration majoritaire du Higgs est  $H \rightarrow b\bar{b}$ .

<sup>(3)</sup>Notre problème étant ici d'ordre essentiellement cinématique, le modèle physique choisi n'est pas censé refléter la réalité. On doit toutefois vérifier que la restriction du modèle physique ne pose pas de problème d'invariance de jauge ce qui est heureusement le cas ici (la section efficace asymptotique de  $W^+W^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$  est une constante, et on vérifie aisément les identités de Ward-Takahashi (voir Annexe C) sur ce processus simple). On peut donc l'assimiler à un processus physique.

une masse invariante de  $W$  importante car le couplage entre deux  $W$  longitudinaux et un Higgs augmente avec cette masse invariante. Et comme ici cette masse invariante est contrainte d'être égale à la masse du Higgs (car le Higgs est réel), on s'attend à ce que l'approximation fonctionne correctement pour un Higgs lourd mais pas nécessairement pour un Higgs léger. La généralisation que j'ai mentionnée avant ne sera donc testée qu'à titre anecdotique pour regarder si les ordres de grandeurs sont toutefois respectés pour  $M_H = 100 \text{ GeV}$ . Le fait que l'approximation fonctionne mieux pour un Higgs lourd a été observé aussi dans la production de deux Higgs ( $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ , voir plus loin).

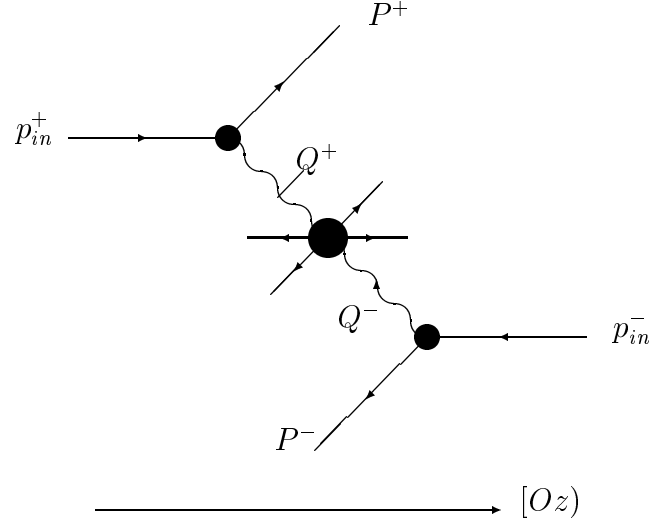
### 7.1.1 Cas de 4 particules ou plus dans l'état final

Regardons donc maintenant ce cas plus complexe de processus comportant au moins 4 particules dans l'état final. Le sous-processus est donc déclenché par la "fusion" de deux particules (en l'occurrence deux  $W$ ). Etant donnée la nature multipériphérique de ces processus, il va nous falloir trouver un paramétrage adapté (voir figure 7.4). Il existe pour cela des relations dites "spacelike recursion relation" (voir [105]) mais qui sont trop compliquées et mal adaptées à notre processus. On peut néanmoins s'en inspirer et l'espace des phases peut s'écrire<sup>(4)</sup> :

$$d\sigma = \frac{S_X}{2s(2\pi)^{3n-4}} \int \frac{dt_- dt_+ d^2\vec{r}_- d^2\vec{r}_+}{4(m_W^2 - t_-)(M_W^2 - t_+)} R_2(Q_-, Q_+) \theta((Q_+ + Q_-)^2 - s_{seuil}) |\mathcal{M}|^2 \quad (7.2)$$

---

<sup>(4)</sup> On supposera pour simplifier que le sous processus est un processus  $2 \rightarrow 2$  ( $R_2(Q_-, Q_+)$  est l'élément d'espace de phase pour 2 particules; la généralisation au cas de  $n$  particules dans l'état final du sous-processus est immédiate).

**Fig. 7.4:** Cinématique de fusion

avec les définitions suivantes :

$$p_{W^\pm} = \begin{cases} \frac{\sqrt{s}}{2} \left( \frac{Y_\pm}{X_\pm} + X_\pm \right) \\ r_{\pm x} \\ r_{\pm y} \\ \pm \frac{\sqrt{s}}{2} \left( \frac{Y_\pm}{X_\pm} - X_\pm \right) \end{cases} \quad (7.3)$$

$$q_\pm = \begin{cases} \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 - \frac{Y_\pm}{X_\pm} + X_\pm \right) \\ -r_{\pm x} \\ -r_{\pm y} \\ \pm \frac{\sqrt{s}}{2} \left( 1 - \frac{Y_\pm}{X_\pm} + X_\pm \right) \end{cases} \quad (7.4)$$

avec  $t_\pm = q_\pm^2$ ,  $X_\pm = (m_W^2 - t_\pm)/s$ ,  $Y_\pm = (m_W^2 + \vec{r}_\pm^2)/s$ ,  $S_X$  est le facteur de symétrie du sous processus (1/2 ici avec les deux Higgs),  $\varepsilon = M_W^2/s$ . Dans l'expression de  $d\sigma$ , toute la difficulté se situe dans la fonction  $\theta$  qui est là pour assurer que l'énergie du sous-processus est bien supérieure au seuil ( $s_{seuil}$ ). Cette fonction  $\theta$  détermine en fait l'ampleur des variations de  $X_\pm$  et de  $Y_\pm$  qui sont manifestement des variables

fondamentales dans cette formulation du calcul. On peut toutefois établir quelques inégalités essentielles qui sont les limites cinématiques sur ces variables.

$$(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2 \leq (1 - \sqrt{1 - 4Y_{\pm}})/2 \leq X_{\pm} \leq (1 + \sqrt{1 - 4Y_{\pm}})/2 \leq (1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2 \quad (7.5)$$

On peut d'ores et déjà voir que les valeurs de  $X_{\pm}$  qui contribueront le plus sont les valeurs proches de la borne inférieure qui est très petite à haute énergie ( $\simeq \varepsilon$ ). En effet on peut voir dans un premier temps que les valeurs proches de 1 pour  $X_{\pm}$  correspondent au cas où la particule spectatrice labellée  $+$  (on la notera  $P^+$  ainsi que son impulsion) sera dirigé vers les  $z < 0$  (retrodiffusion), et cette configuration est importante en probabilité lorsque cette particule spectatrice est émise par la particule initiale labellée  $-$  ( $p_{in}^-$ )<sup>(5)</sup>. Par contre si  $X_{\pm}$  est petit, la particule spectatrice est dirigé vers les  $z > 0$ . Passer d'une configuration à l'autre revient à permuter  $P^+$  et  $P^-$  et comme ceux-ci sont émis près de l'axe du faisceau à haute énergie, les régions correspondantes dans l'espace de phase ne se recouvrent que sur une région où l'amplitude est négligeable. Numériquement, cela se caractérise par un spectre en  $X_{\pm}$  très piqué vers les petites valeurs, comme on le voit sur la figure 7.5 que j'ai tirée du cas particulier  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ . Pour confirmer les propos précédents, on peut couper sur cette distribution les événements ayant un  $P_z^+ < 0$  et on constate sur la figure 7.6 que la distribution ne contient plus les valeurs proches de 1.

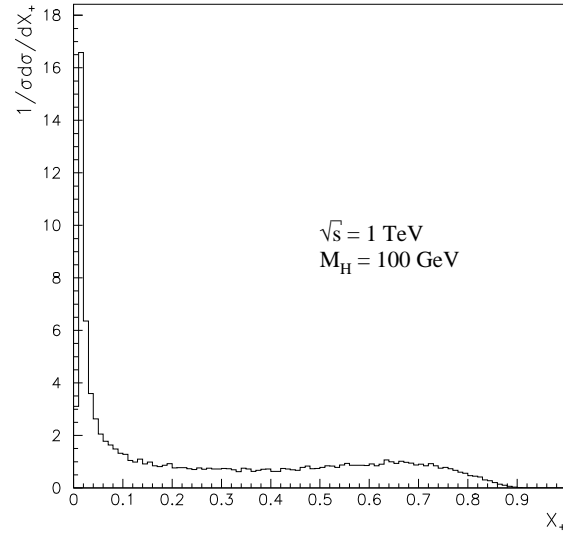
Le fait que  $X_{\pm}$  soit préférentiellement petit se comprend car cette variable mesure la virtualité des  $W$  internes qui déclenchent le sous-processus. Comme nous l'avons vu, c'est cette petite virtualité qui autorise le formalisme des fonctions de structure.

Le calcul du  $R_2$  ne pose pas de problèmes particulier. On considère  $\pi = (\pi^0, \vec{\pi}) = Q_+ + Q_- = p_{H_1} + p_{H_2}$  ( $p_{H_{1,2}}$  = impulsion finales du sous processus). Si on se place

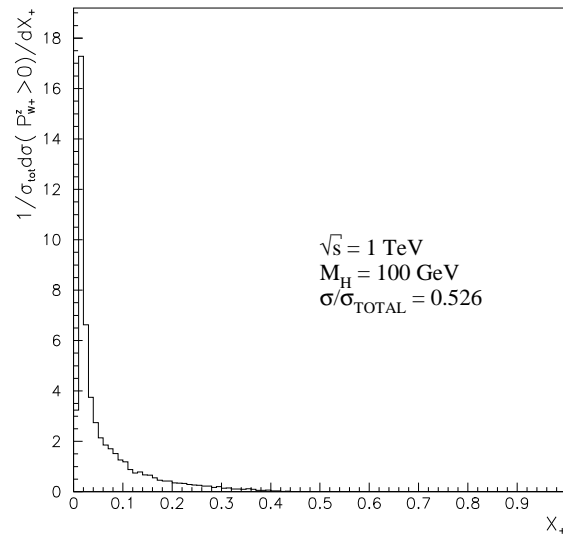
---

<sup>(5)</sup>Ce n'est possible que pour certains types de particules, mais nous devons garder à l'esprit que nous comptons l'appliquer à  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  où cela s'applique.

**Fig. 7.5:** *Distribution en  $X_+$  dans  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .*



**Fig. 7.6:** *Distribution en  $X_+$  avec  $P_{W^+}^z > 0$  ( $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ ).*





dans le référentiel propre de  $\pi$ , c'est à dire dans le centre de masse du sous processus, on a :

$$R_2(\pi) = \frac{\lambda^{1/2}(\omega^2, m_{H_1}^2, m_{H_2}^2)}{8\omega^2} d\Omega^* \quad (7.6)$$

où  $\lambda$  a été défini au chapitre 4,  $d\Omega^* = d(\cos(\theta^*))d\Phi^*$  défini la direction de  $\vec{p}_{H_1}$  dans le référentiel propre de  $\pi$  et où enfin  $\omega = \sqrt{\pi^2}$ .

## 7.2 Comparaison entre Monte-Carlo exact et convolution

### 7.2.1 $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$

Pour commencer revenons sur le cas de  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$ . En prenant ici pour section efficace du sous processus la valeur :

$$\sigma_{sub} = \frac{2\alpha\pi^2 M_H^2}{\sin^2(\theta_W) M_W^2 s} \times \frac{1 - 2M_W^2/M_H^2}{\sqrt{1 - 4M_W^2/M_H^2}} \quad (7.7)$$

Et pour les fonctions de structure<sup>(6)</sup> nous avons pris :

$$D_{W_L}^{(W_T)}(z) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1-z}{z}$$

---

<sup>(6)</sup>  $z$  est ici la fraction d'impulsion longitudinale emportée par le  $W$ .

$$D_{W_L}^{(W_L)}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} z(1-z) \left( \log \left( \frac{Q_p^2}{M_W^2} \right) - 1 \right) \quad (7.8)$$

Le dernier terme de  $\sigma_{sub}$  n'a pas été pris en compte pour  $M_H = 100 \text{ GeV}$  ainsi que le terme  $(\log(M_H^2/M_W^2) - 1)$  pour  $D_{W_L}^{(W_L)}(z)$ . Ceci dans le but de simplement regarder si les ordres de grandeurs des sections efficaces sont respectés pour  $M_H = 100 \text{ GeV}$  alors que le sous processus n'est pas défini pour cette valeur de  $M_H$ . Nous avons cherché à discuter quelle valeur de  $Q_p^2$  (eq. (7.8)) permet d'obtenir les meilleures approximations lorsqu'on a un  $W$  longitudinal sortant.  $Q_p$  rappelons le représente en fait l'impulsion transverse maximale qui doit être prise en considération. La solution proposée dans[96] de prendre pour  $Q_p$  la valeur maximale autorisée cinématiquement, qui vaut  $s(1-z)^2$ , donne en général d'assez mauvais résultats comme nous le verrons. Nous comparerons cette valeur de  $Q_p^2$  à une autre souvent utilisée qui vaut  $\hat{s}/4$  ( $=M_H^2/4$ ) ici). On obtient les résultats présentés sur les figures 7.7 et 7.8. On remarque que l'accord est nettement moins bon quand on a un  $W$  longitudinal sortant. Un bon indice peut-être pour expliquer cette différence réside dans les distributions en  $\log(-Q^2/s)$  qui sont représentées sur la figure 7.9. La valeur moyenne de  $Q^2$  lorsqu'on a un  $W$  longitudinal sortant est bien plus élevée que lorsque ce  $W$  est transverse. Or l'approximation des fonctions de structure repose sur le fait que le  $W$  interne est proche de sa couche de masse, et ce n'est manifestement pas le cas ici.

## 7.3 Application à la production de paires de Higgs

### 7.3.1 Approximation de la section efficace de $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e H H$

En utilisant l'approximation des  $W_L$  effectifs dans l'électron on peut évaluer  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e H H)$  :

Fig. 7.7: Comparaison exact - approximation pour  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$

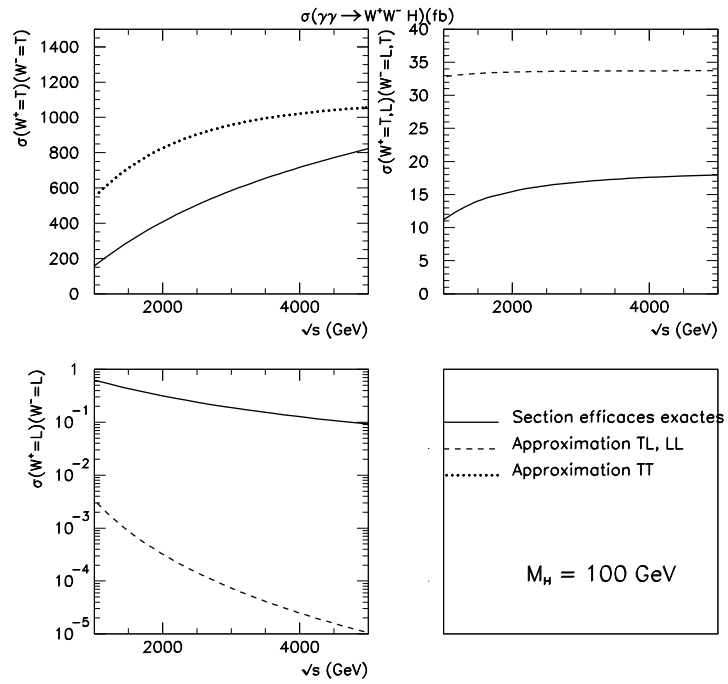
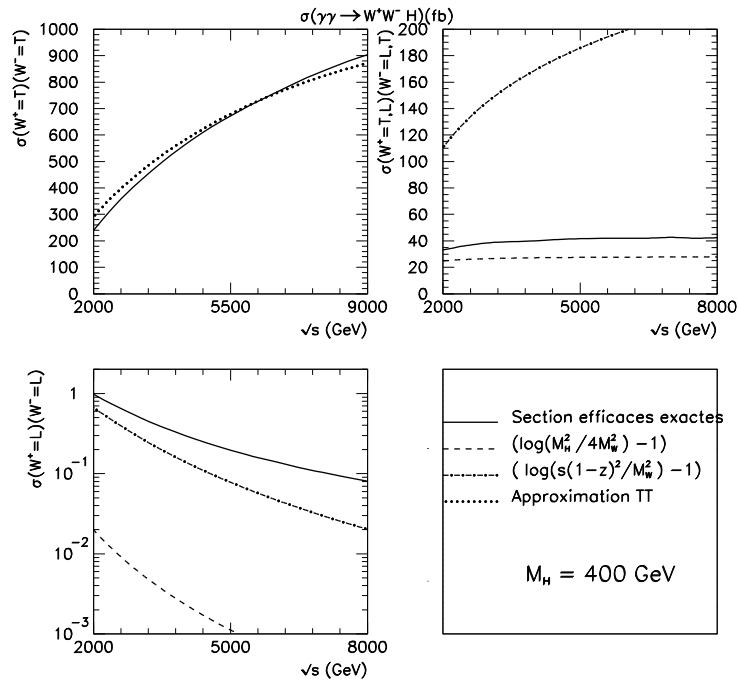
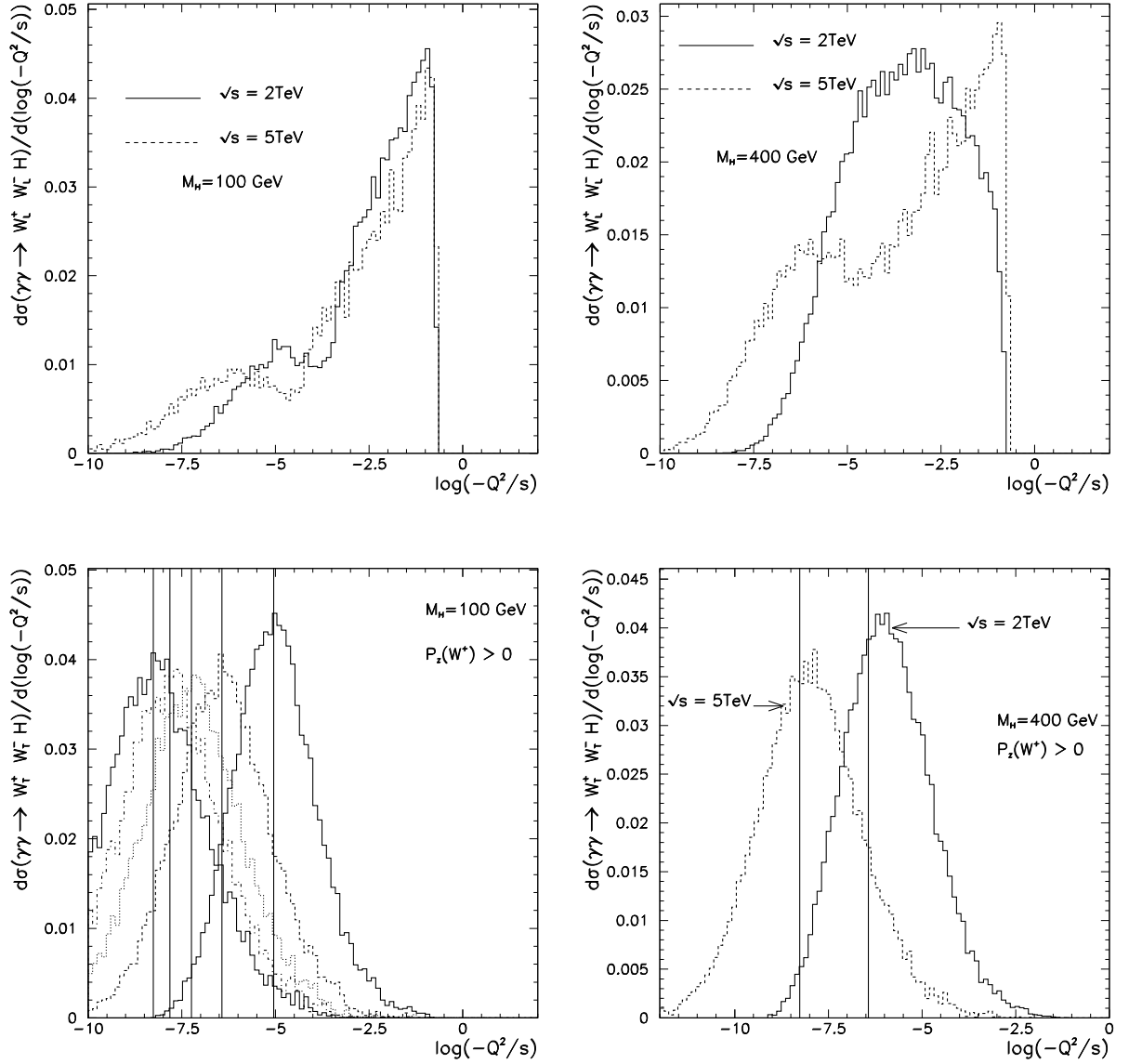


Fig. 7.8: Comparaison exact - approximation pour  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$



**Fig. 7.9:** Ces courbes représentent les virtualités des  $W$  dans le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$ . En haut se trouve le cas où les deux  $W$  spectateurs sont longitudinaux et à droite le cas où ils sont tous les deux transverses. Dans tous les cas on n'a gardé qu'un seul hémisphère ( $P_z(W^+) > 0$ ,  $Q^2 = (p_{\gamma_1} - p_{W^+})^2$ ). En bas sont représentées les distributions pour  $\sqrt{s} = 1, 2, 3, 4$  et  $5$  TeV et  $M_H = 100$  GeV à gauche, et pour  $M_H = 400$  GeV à droite. Les lignes verticales ont pour abscisse  $\log(M_W^2/s)$ . Il est remarquable que la valeur moyenne de chaque distribution tombe "pile" sur ces lignes.



$$\begin{aligned}
\sigma_{e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH} &\simeq \int_{4M_H^2/s}^1 d\tau \int_{\tau/z_m}^{z_m} \frac{dz}{z} D(z) D(\tau/z) d\sigma(W_L W_L \rightarrow HH) \\
&\simeq \int_{4M_H^2/s}^1 d\tau \mathcal{L}_{W_L^+ W_L^-}^{e^+ e^-}(\tau) \sigma_{W_L W_L \rightarrow HH}(\tau s)
\end{aligned} \tag{7.9}$$

où  $z_m$  est la valeur maximale permise cinématiquement de  $z$  (fraction d'impulsion longitudinale transmise à l'un des  $W$  virtuels). On obtient pour la luminosité en  $W_L^+ W_L^-$  :

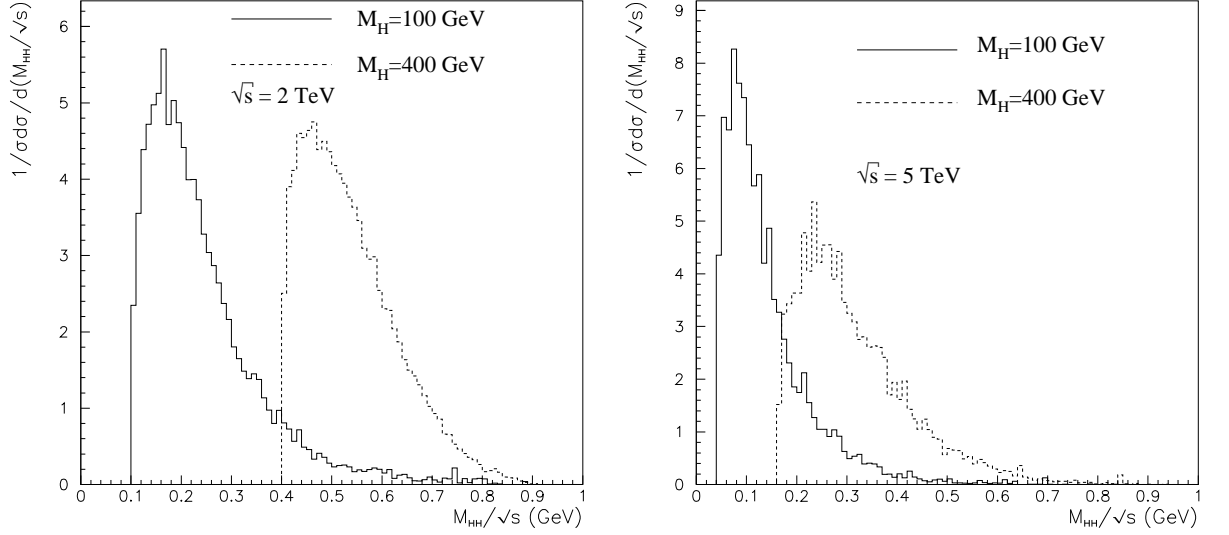
$$\mathcal{L}_{W_L^+ W_L^-}^{e^+ e^-}(\tau) \simeq \left( \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \right)^2 \frac{1}{\tau} \left( (1+\tau) \ln \frac{1}{\tau} - 2(1-\tau) \right) \tag{7.10}$$

en négligeant la masse du  $W$  devant l'énergie de l'électron. Cette luminosité en  $W_L^+ W_L^-$  dans  $e^+ e^-$  est piquée pour de petites valeurs de  $\tau$ . Dans cette région, la section efficace de  $W^+ W^- \rightarrow HH$  croît rapidement et une convolution exacte analytique n'est pas simple. En revanche, nous avons calculé analytiquement cette convolution en prenant la limite asymptotique de cette section efficace, donnée par (6.3). On obtient alors :

$$\sigma_\infty^{EWA}(e^+ e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH) \simeq \left( \frac{\alpha}{4\pi s_w^2} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \ln^2 \left( \frac{4M_H^2}{s} \right) + 2 \ln \left( \frac{4M_H^2}{s} \right) + 3 \right) \sigma_\infty \tag{7.11}$$

On ne s'attend pas à ce que cette approximation soit très bonne dans la mesure où on voit clairement sur la dépendance en énergie de  $W^+ W^- \rightarrow HH$  (Figs 6.7) qu'on surestime la section efficace aux basses énergies alors que la distribution en énergie du sous-processus est plutôt piquée sur les énergies proches du seuil comme on peut le voir sur les figures 7.10 (ce que montre la fonction de luminosité que l'on vient de voir). Cela étant, on peut s'attendre à ce que le comportement à haute énergie de la section efficace approximée soit correct en ordre de grandeur.

**Fig. 7.10:** Distribution de la masse invariante réduite de la paire de Higgs pour  $M_H = 100, 400 \text{ GeV}$  et  $\sqrt{s} = 2 \text{ TeV}, 5 \text{ TeV}$ .  $M_{HH}/\sqrt{s} = \sqrt{\tau}$

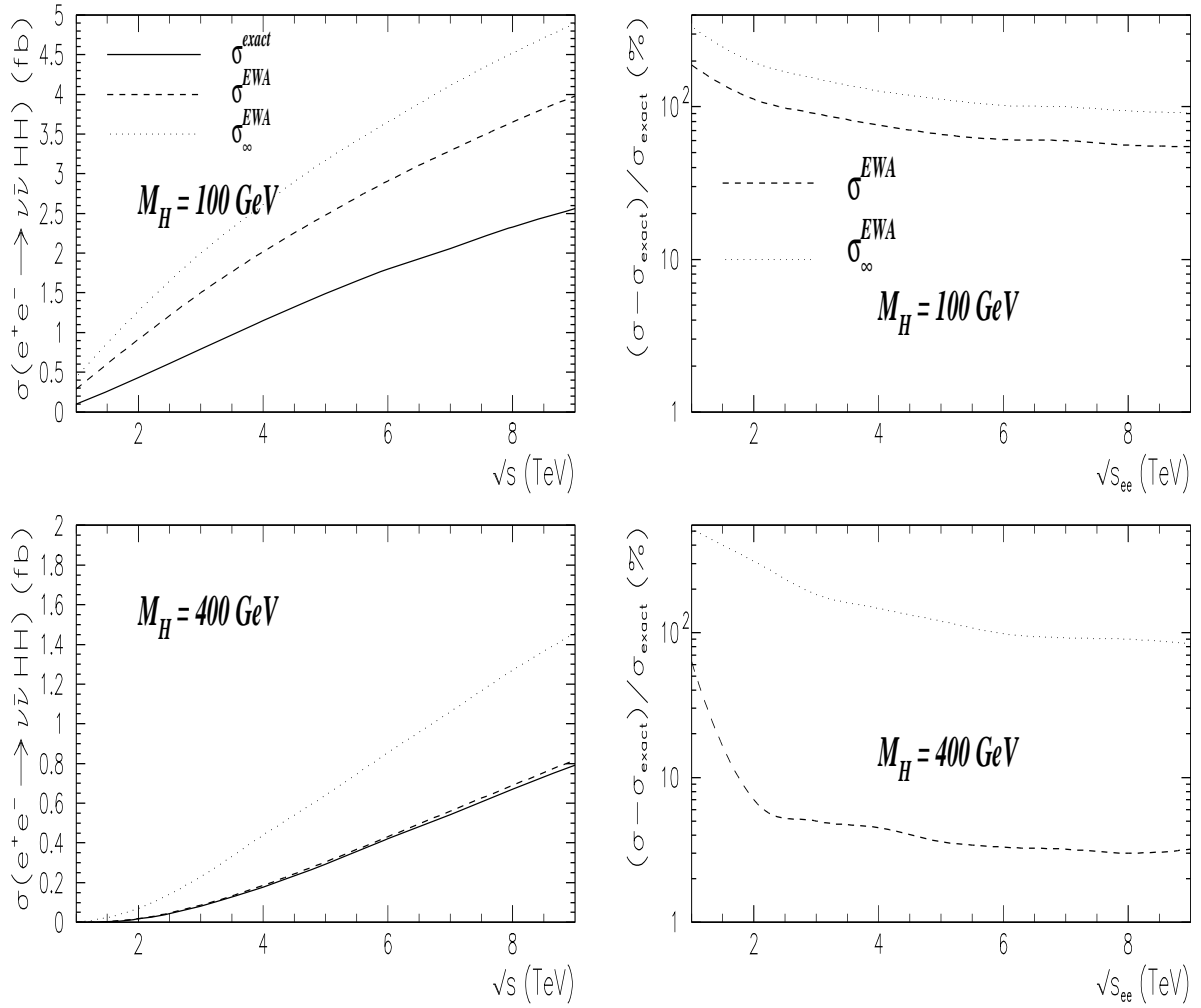


On peut voir sur les figures 7.11 que pour un Higgs de 100 GeV, l'approximation du  $W_L$  effectif ne reproduit pas la section efficace exacte à mieux que 50% près, et encore vers 10 TeV, mais le comportement général est correct. Par contre, l'approximation est excellente pour un Higgs lourd et reproduit à mieux que 10% la section efficace exacte à  $\sqrt{s} = 2 \text{ TeV}$  et fait même mieux que 3% à 10 TeV. On peut comparer ces résultats avec ceux donnés par  $p\bar{p}$  à 40 TeV [104]. La section efficace “asymptotique” par contre surestime la section efficace de 100% pour  $M_H = 400 \text{ GeV}$ .

### 7.3.2 Approximation de $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$

En regardant les fonctions de distribution d'un  $W_L$  dans le photon et dans l'électron, on est tenté de conclure que photons et électrons en produisent autant. En fait, la production des  $W_L$  dans le photon est indépendante de la polarisation du photon, et les deux charges sont produites de façon équiprobables. On peut donc re-

**Fig. 7.11:** Comparaison de l'approximation du  $W_L$  effectif ( $\sigma^{EWA}$ ) avec le résultat exact  $\sigma^{exact}$  pour  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e HH$  dans les cas d'un Higgs léger ou lourd. Est indiquée aussi la section efficace calculée analytiquement avec la limite asymptotique du sous processus  $\sigma_\infty^{EWA}$ .





garder  $W_L^\pm W_L^\pm$  (mode qui ne nous intéresse pas), alors que seul  $W_L^+ W_L^-$  est possible dans  $e^+e^-$ . Mais on gagne quand même un facteur deux dans  $\gamma\gamma$  puisque deux combinaisons de charges sont possibles dans l'état final  $W^+W^-X$  (un photon pourra produire les deux charges possible pour le  $W$  sortant et la charge du deuxième est alors évidemment fixée). Mais il faut toutefois garder à l'esprit que l'approximation n'est valide que si on peut négliger la masse des  $W$ , d'autant plus qu'on dispose de moins d'espace de phase dans  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$  que dans  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_eHH$ . De plus, nous avons vu que pour obtenir un spectre de photons piqué sur les hautes énergies, il est nécessaire d'avoir au départ des faisceaux d'électrons polarisés. Mais alors, en prenant une polarisation convenable, on gagne un facteur 4 dans  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_eHH)$ . Il semble donc qu'il y ait une complémentarité entre différents canaux mais il est presque certain que la convolution avec les spectres de photons ne permettra pas aux collisionneurs  $\gamma\gamma$  de faire significativement mieux qu'en  $e^+e^-$  pour la production de paire de Higgs (voir chapitre sur le couplage  $H^3$ ).

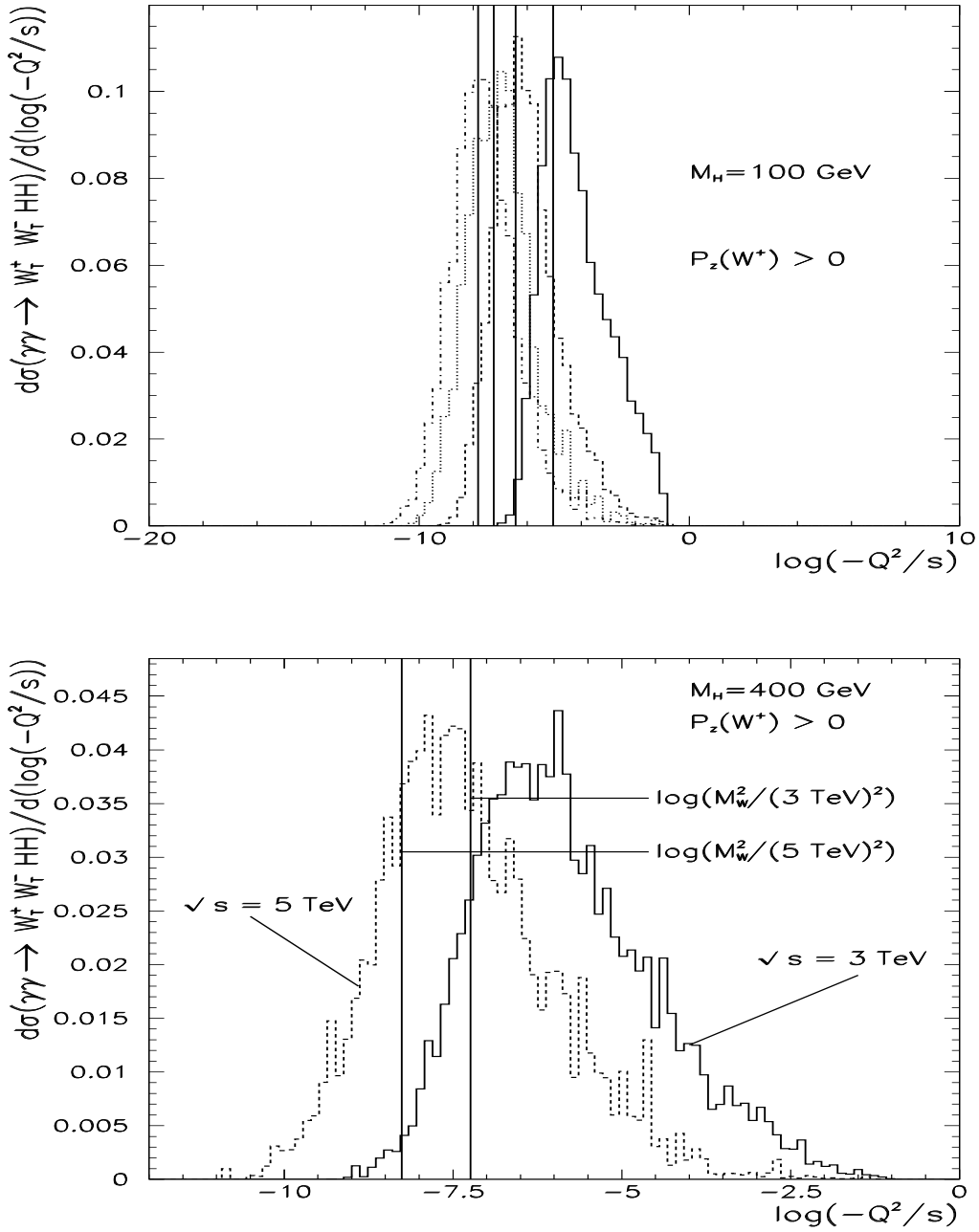
Avant de réaliser la convolution entre les fonctions de structure et le sous-processus ( $W^+W^- \rightarrow HH$ ) étudié auparavant, regardons en détail la virtualité des  $W$  internes en tracant cette fois encore  $\log(-Q^2/s)$ . On obtient la figure 7.12. Les valeurs de  $-Q^2$  obtenues sont bien voisines de  $M_W^2$  et on s'attend pour les transverses à une approximation raisonnable. Par contre on a toujours le même problème pour les longitudinaux (figure 7.13) avec une valeur moyenne de  $Q^2$  qui n'est pas petite et qui rend bancal le formalisme de fonctions de structure dans ce cas. Comme on le verra plus loin, on reproduit à peine le comportement de la section efficace lorsqu'on a des longitudinaux sortants.

Si on prend la fonction de structure en  $W_L$  du photon donnée dans (5.18) et en tenant compte du facteur 2 de charge dans la convolution on peut conclure que la section efficace de  $\gamma\gamma \rightarrow W_T^- W_T^+ HH$  doit être environ  $2(4s_W^2)^2$  <sup>(7)</sup> fois la

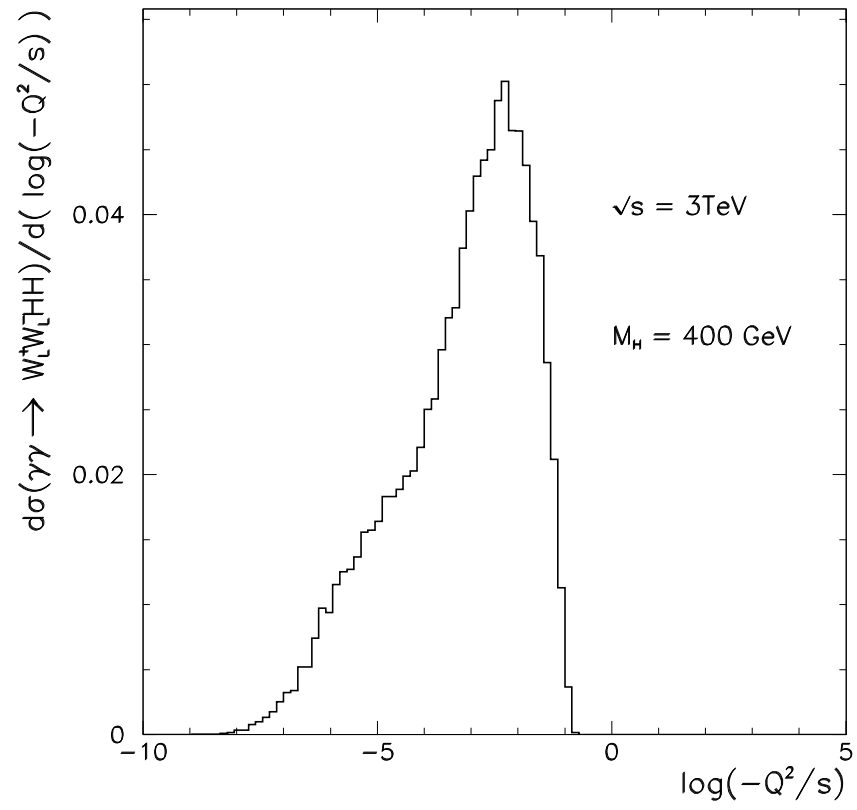
---

<sup>(7)</sup>Pour établir le facteur  $(4s_W^2)^2$ , il suffit de constater que le couplage  $\gamma W^+W^-$  vaut  $e$  alors que le couplage de  $e^-W^-\nu$  est  $g/\sqrt{2}$ . Donc pour obtenir  $e$  il faut multiplier ce dernier par  $\sqrt{2}s_W$ . Ce coefficient doit être mis au carré car il est présent deux fois dans l'amplitude, puis encore au carré pour la section efficace ce qui donne  $4s_W^4$ . Comme une seule combinaison de polarisation est

**Fig. 7.12:** Ces courbes représentent les virtualités des  $W$  dans le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W_T^+ W_T^- H H$ . Sur la figure du haut ( $M_H = 100 \text{ GeV}$ ), la courbe la plus à droite correspond à  $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ , ensuite à sa gauche  $\sqrt{s} = 2 \text{ TeV}$  puis  $3 \text{ TeV}$  et  $4 \text{ TeV}$ , et les lignes verticales ont pour abscisse  $\log(M_W^2/s)$ . En bas ( $M_H = 400 \text{ GeV}$ ) Comme pour  $\gamma\gamma \rightarrow W^+ W^- H$ , on constate que la virtualité moyenne se situe aux alentours de  $M_W^2$ .



**Fig. 7.13:** Distribution en  $\log(-Q^2/s)$  pour  $\gamma\gamma \rightarrow W_L^+ W_L^- H H$ .



section efficace de  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$  à haute énergie, quand la différence entre les deux espaces de phases est faible. La comparaison entre les deux sections efficaces va donc nous donner une mesure de la contribution des graphes de bremsstrahlung dans le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W_T^+ W_T^- HH$  dans la mesure où on a vérifié avant que les fonctions de structure reproduisent très bien  $e^+e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e HH$ . Il est difficile d'obtenir cette information autrement car on ne peut séparer les graphes de bremsstrahlung des autres. Ceux-ci ne forment en effet pas un sous-groupe invariant de jauge. Pour  $M_H = 100 \text{ GeV}$ , la contribution de ces graphes de bremsstrahlung est non négligeable mais pour  $M_H = 400 \text{ GeV}$ , elle est plus réduite et de l'ordre de 30% à 8 TeV. Il n'est donc pas tellement surprenant que la section efficace exacte soit moins bien reproduite dans le mode  $\gamma\gamma$  par l'approximation du  $W_L$  effectif que dans  $e^+e^-$ . Néanmoins, on peut voir (Fig. 7.15) que pour un Higgs de 400 GeV, l'approximation n'est pas beaucoup moins bonne que dans le cas de la production d'un seul Higgs[75]. A 8 TeV, la section efficace est reproduite à 30% près.

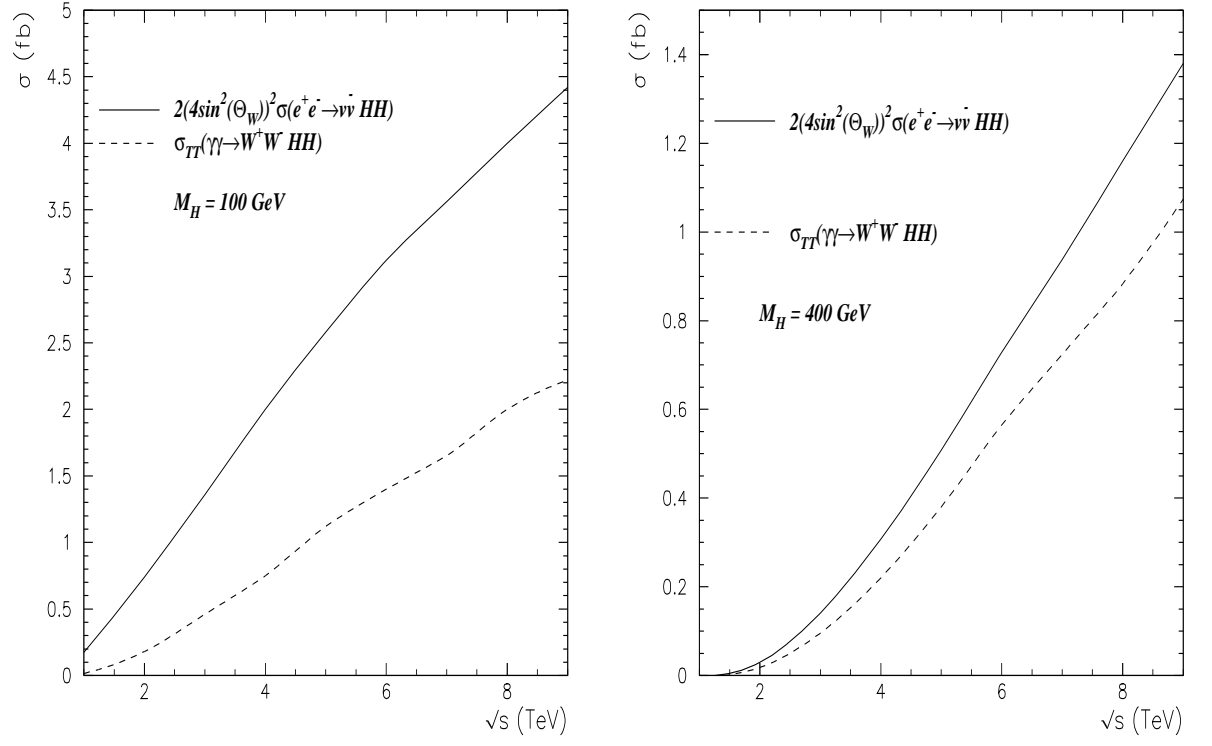
Dans le cas de  $\gamma\gamma \rightarrow W^+ W^- HH$  on vient de voir que lorsque les  $W$  sont transverses alors l'approximation du  $W$  équivalent fonctionne assez bien pour un Higgs lourd. Si l'un des deux  $W$  ou les deux sont longitudinaux, on ne s'attend pas à un miracle au vu de la distribution en  $Q^2$  (figure 7.9), et en utilisant les mêmes fonctions de structure que précédemment on obtient les figures 7.16<sup>(8)</sup>. Comme précédemment dans  $\gamma\gamma \rightarrow W^+ W^- H$ , le choix du  $Q_p^2$  dans le logarithme est déterminant. Dans tous les cas que nous venons d'étudier, la valeur  $s(1-z)^2$  (correspondant à l'impulsion transverse maximale) surestime très largement les sections efficaces en général. Le meilleur résultat est obtenu en fait en prenant pour  $Q_p^2$  la valeur  $\hat{s}/4 = \tau s/4$ . Notons aussi sur ces figures la différence importante entre les modes  $J_z = 0$  et  $J_z = 2$ . On peut interpréter ce décalage par un effet important des graphes de bremsstrahlung (graphes 1b – c et 4 – 10 de la figure 4.5). En effet, si les graphes de fusion dominaient réellement, l'hélicité du photon étant transmise au  $W$  spectateur associé, et

---

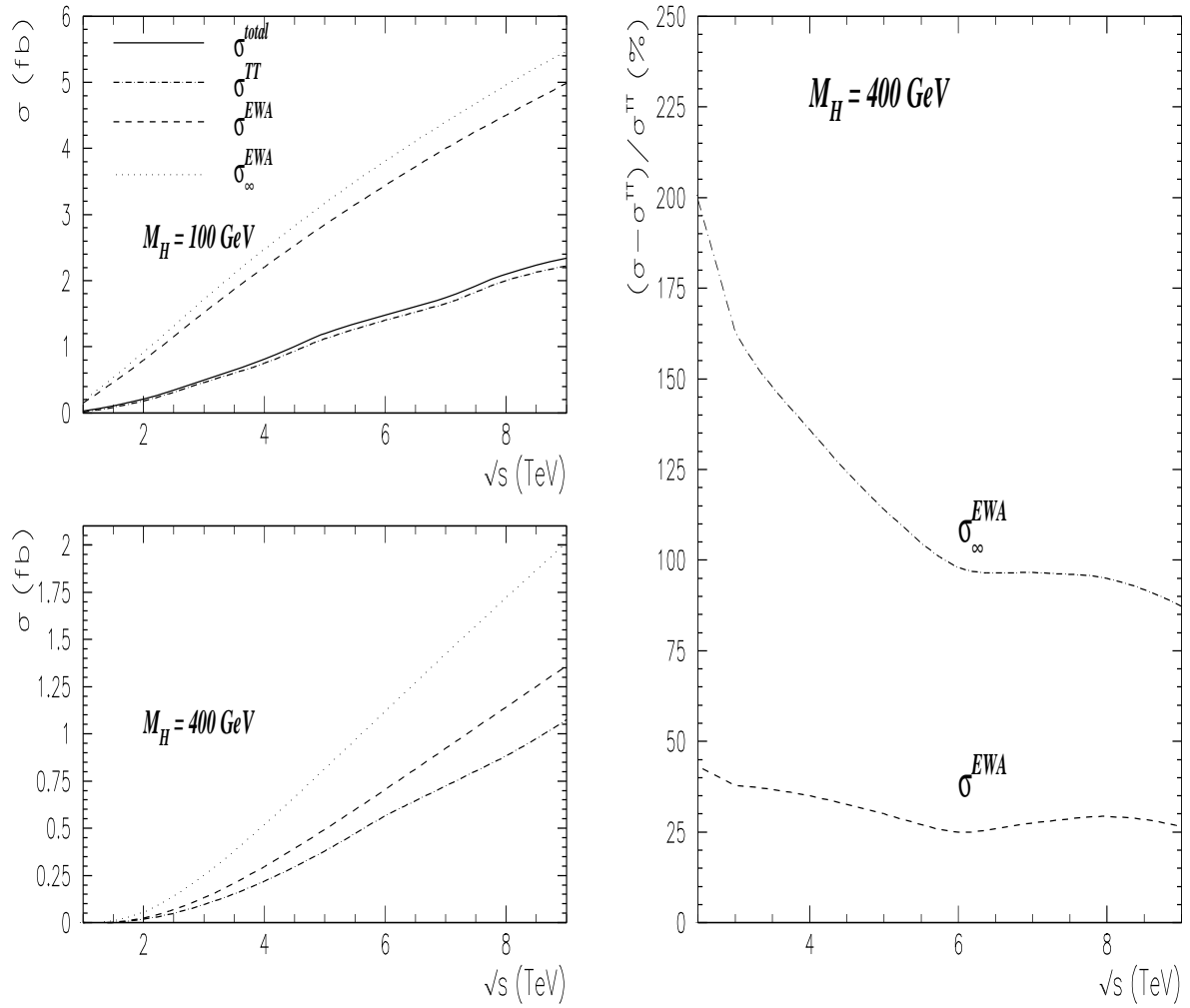
possible dans  $e^+e^-$  alors que les 4 donnent le même résultat dans  $\gamma\gamma$ , il faut encore multiplier par 4 et on obtient  $(4s_W^2)^2$ .

<sup>(8)</sup>Les expressions entre parenthèses sur ces figures sont les termes qui interviennent dans les fonctions de structure eq. ((7.8)).

**Fig. 7.14:** *Effet des graphes de bremstrahlung  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ .*

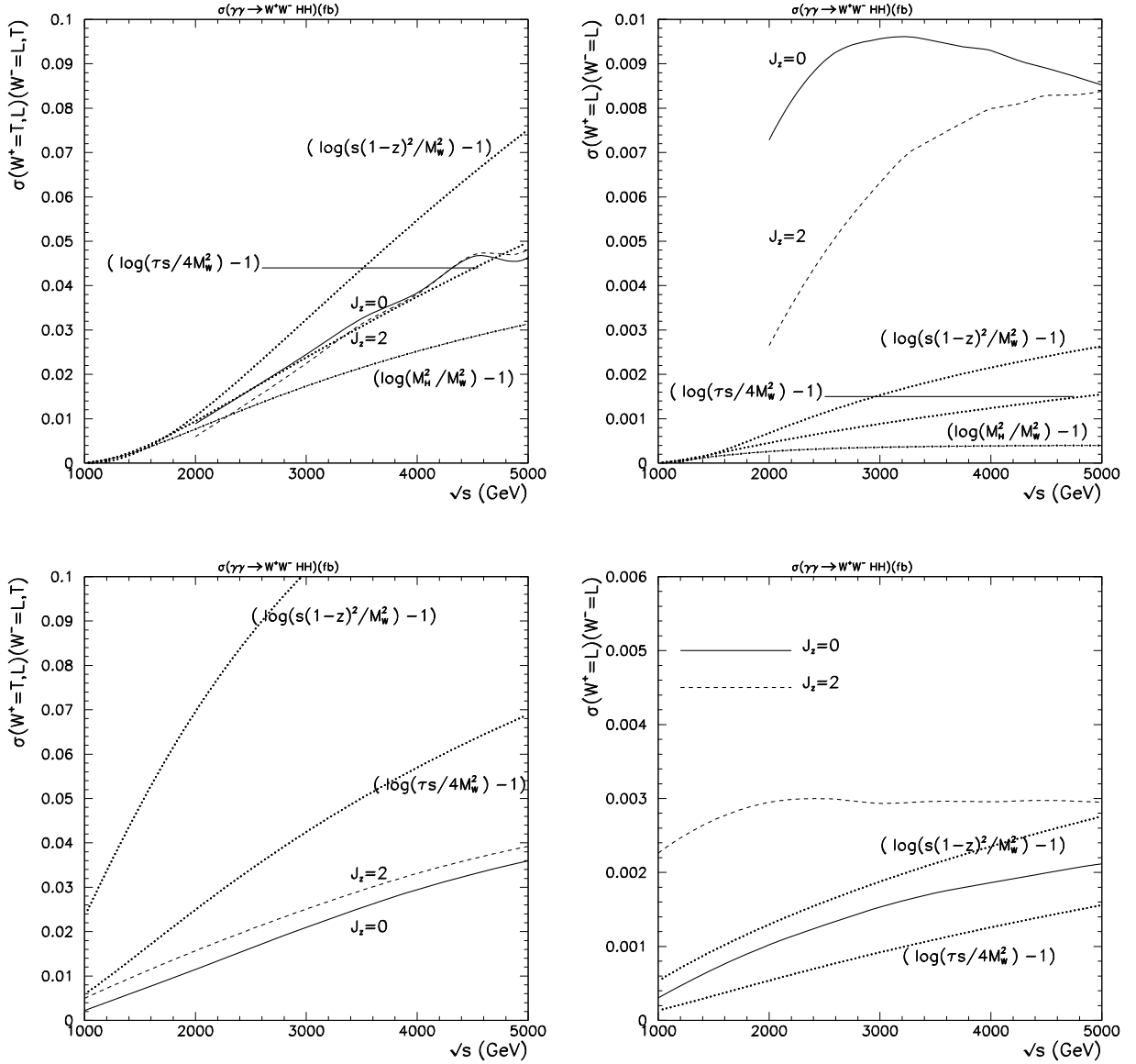


**Fig. 7.15:**  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ : comparaison de l'approximation du  $W_L$  effectif,  $\sigma^{EWA}$ , au résultat exact ( $\sigma^{TT}$ ) pour un Higgs léger ou lourd.  $\sigma^{total}$  est le résultat exact comprenant tous les modes possibles de polarisation des  $W$ . Est indiquée aussi la section efficace "asymptotique"  $\sigma_\infty^{EWA}$ , et le pourcentage de déviation pour un Higgs lourd.



le sous-processus n'étant alors pas influencé par cette polarisation, la section efficace devrait dépendre peu du spin total transmis. Or on constate en particulier dans le cas  $LL$  que ces section efficaces se rapprochent lentement mais que pour des énergies plus petites que  $5\text{ TeV}$  l'écart est important.

**Fig. 7.16:** Comparaison exact - approximation pour  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-HH$ . Les figures du haut correspondent à  $M_H = 400 \text{ GeV}$  et celles du bas à  $M_H = 100 \text{ GeV}$ .  $J_z = 0$  et  $J_z = 2$  indiquent les sections efficaces exactes pour les deux modes de spin possibles.





# Chapitre 8

## Conclusion

Les travaux qui ont été exposés dans cette thèse sont de deux types: phénoménologie pure quant à la mesure des selfs couplages du boson de Higgs et les tests de fonctions de structure, et des aspects plus théoriques concernant la façon dont l'invariance de jauge se manifeste dans des processus de diffusion électrofaibles, avec comme optique initiale la dérivation la plus rigoureuse possible de fonctions de structure.

Comme je l'ai montré dans la première partie de cette thèse, une connaissance complète, expérimentale, du secteur scalaire de l'interaction électrofaible (s'il existe) est encore hors de portée mais l'essentiel peut être réalisé. La découverte du boson de Higgs au collisionneur LHC est tout à fait envisageable si sa masse est dans la fenêtre permise par les contraintes de Grande Unification et de stabilité du potentiel de Higgs. Mais trouver une particule scalaire dans la nature ne suffit pas, encore faut-il qu'elle puisse se coupler aux fermions (proportionnellement à leur masse) et à elle-même pour pouvoir être décemment assimilée à une particule de Higgs. Le potentiel minimal envisageable comporte un couplage entre trois bosons de Higgs et un couplage entre 4 Higgs. Ce dernier ne me semble pas mesurable dans les collisionneurs envisagés pour un avenir proche ou moyennement proche (LHC, NLC).

Les sections efficaces sont si faibles, et l'analyse si difficile qu'il paraît déraisonnable de donner mieux que des limites très larges sur ce couplage. Néanmoins, le couplage à trois Higgs peut être mesuré. Si le Higgs est relativement léger (autour de 100 GeV) la mesure peut être effectuée avec une précision estimée à 10 % (au mieux). Si sa masse est plutôt de l'ordre de 400 GeV, les sections efficaces sont très faibles et le peu de statistique qu'il sera possible d'obtenir ne permettra pas de faire mieux que d'établir des limites larges, avec toutefois un contre-effet bénéfique qui est que la contribution du couplage aux processus devient dominante (partie "signal") et que la discrimination de ce signal est alors plus facile. Par conséquent dans cette situation avec un couplage  $h_3$  très différent de 1, le peu d'événements collectés suffiraient à exclure le Modèle Standard Minimal. Suivant la masse du Higgs on peut donc utiliser différentes analyses qui permettent de recouvrir le domaine de masse du Higgs, c'est à dire jusqu'à environ 1  $TeV$  où la théorie perturbative cesse d'être valable.

Le temps qui nous sépare de la construction éventuelle du collisionneur NLC est encore loin et il est très difficile de spéculer sur l'évolution des technologies comme des résultats théoriques. Si jamais ce collisionneur pouvait être doté d'une très haute luminosité ( $> 100 \text{ fb}^{-1}$ ) la mesure du couplage à trois bosons de Higgs pourrait être effectuée avec plus de précision (moins de 5%) et du coup peut-être que le couplage à 4 bosons de Higgs pourrait être estimé de façon moins incertaine. En effet, un obstacle important à cette mesure est que les processus faisant intervenir le couplage à quatre Higgs font intervenir aussi le couplage à trois Higgs, ce qui ajoute une incertitude supplémentaire. Si l'incertitude sur le couplage à trois Higgs peut être fortement réduite (un peu ne suffirait pas), à l'aide par exemple d'une luminosité plus importante, alors mettre des limites sur le couplage  $H^4$  est envisageable. Avec les données actuelles, ces considérations restent encore malgré tout un peu de la science fiction.

Nous avons vu aussi que de nombreux tests de la brisure de symétrie passent par l'étude de réactions de fusions qui dominent largement les processus. Nous nous sommes donc efforcés de chercher à compléter partiellement le formalisme des fonc-

tions de structure afin de pouvoir convenablement approximer ces processus. Nos résultats sont mitigés. Autant les fonctions de structure simples qui existaient dans la littérature s'avèrent efficaces dans certaines situations, autant les raffinements que nous y avons apportés n'apportent d'amélioration que sur des processus particuliers. Il me paraît difficile d'arriver à trouver un formalisme très général qui donne de bons résultats à tous les coups. Nous avons néanmoins montré qu'on peut, sous réserve de coupure éventuelles, correctement approximer un processus dominé par un  $W$  transverse dans le canal  $t$  avec une fonction de structure. Nous avons vu aussi que l'idée de Bell de calculer les processus en jauge unitaire (et en utilisant l'astuce de Veltman) peut donner dans certains cas de bonnes approximations, même s'il ne s'agit pas d'un formalisme de fonctions de structure (qui ne sont pas une fin en soit). Il nous faut par contre déchanter pour la production dans l'état final d'un  $W$  longitudinal, et les distributions dans la virtualité du  $W$  interne semblent indiquer que l'approximation en termes de fonctions de structure n'a même pas lieu d'être semble t'il. Notons que sur les questions d'invariance de jauge nous avons émis un certain nombre d'idées que nous n'avons pas encore exploitées à fond et qui sont encore source de nombreuses recherches.

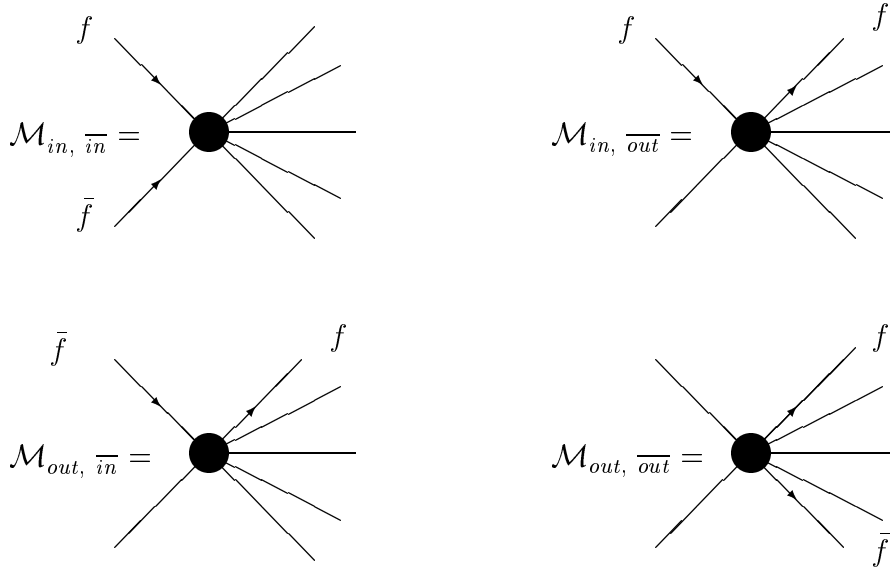
Ces notions d'invariance de jauge dans les graphes de Feynman sont en effet cruciales et par exemple, une collaboration japonaise avec laquelle nous travaillons a d'énormes problèmes pour vérifier les résultats d'un logiciel qui calcule à une boucle n'importe quelle amplitude de diffusion. Lorsqu'on sait que le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$  compte plus de 200 graphes, on comprend les difficultés qu'il y a à tester la validité de l'amplitude calculée, et aussi à simplifier les calculs au maximum. Les différentes techniques de choix de jauge qui ont été exposées dans le chapitre 3 sont prometteuses et vont très probablement nourrir une activité de recherche intense dans l'avenir. Peut-être y a t'il à la clef une compréhension en profondeur des théories de jauge, et une simplification de l'image que nous nous forçons en tant que physiciens des interactions fondamentales dans la matière.



# Chapitre 9

## Annexe A : amplitudes hélicités

La phénoménologie des particules élémentaires nécessite des outils particuliers de calcul. Outre les moyens de calculs formels ou numérique, l'étude des processus physiques nécessite de regarder en profondeur les amplitudes de transition. La conservation du moment cinétique est une donnée importante qui permet de faire certaines prévisions physiques et c'est pourquoi le phénoménologue a souvent besoin de calculer les amplitudes hélicité des processus étudiés. Dans les méthodes usuelles de calculs, on calcule le module carré de l'amplitude, moyenné sur les hélicités entrantes et sommé sur les hélicités sortantes. On perd ainsi beaucoup d'informations sur les symétries (géométriques et de jauge) du problème et surtout, il devient difficile de diviser un processus complet en sous processus car on n'a plus alors accès à la matrice densité de chaque sous processus. De plus, les amplitudes hélicités donnent souvent des expressions condensées plus faciles à manipuler numériquement et même parfois analytiquement. Avec les prochains collisionneurs à très haute énergie, les processus physiques comprendront beaucoup plus de particules et il sera indispensable alors de pouvoir travailler avec des expressions raisonnables en taille. C'est pourquoi mon premier travail a été de regarder différentes façons de calculer ces amplitudes. J'ai donc développé une méthode de calcul qui est manifestement co-

**Fig. 9.1:** *Amplitudes incluant des paires de fermions*

variante et rend plus agréable le calcul d'amplitudes qui comprennent des fermions. Les résultats obtenus sont en fait des généralisation de l'utilisation des formules de Bouchiat et Michel[36]. Cette annexe s'intéresse donc essentiellement au fermions, et lorsque des bosons sont présents on peut se ramener à une expression ne dépendant que des impulsions présentes dans le processus (comme on l'a utilisé dans le premier chapitre de cette thèse avec la formule du groupe CALKUL [37]), ou bien à des produits de spineurs[57, 100].

Considérons donc des processus comprenant juste une paire de fermions en entrée ou en sortie (voir fig. 9.1).

Leurs amplitudes s'écrivent alors :

$$\mathcal{M}_{in, \overline{in}} = \bar{v}(p_+, h_+) \mathcal{O} u(p_-, h_-) = tr[u(p_-, h_-) \bar{v}(p_+, h_+) \mathcal{O}] \quad (9.1)$$

$$\mathcal{M}_{out, \overline{out}} = \bar{u}(p_-, h_-) \mathcal{O} v(p_+, h_+) = tr[v(p_+, h_+) \bar{u}(p_-, h_-) \mathcal{O}] \quad (9.2)$$

( $p_{\pm}$  est le moment de chaque fermion et  $h_{\pm}$  leur hélicité). Ici, plutôt que de décomposer les spineurs en leurs composantes, ce qui est fait habituellement, on préfère exprimer l'amplitude sous la forme de la trace du produit de deux matrices  $4 \times 4$ , l'une étant le produit des deux spineurs que l'on va chercher à écrire sous une forme simple<sup>(1)</sup>, et l'autre étant l'opérateur d'interaction. Dans tous les calculs qui suivent, nous considérerons les paires de fermions dans leur centre de masse. Cette hypothèse s'applique dans le cas des collisionneurs  $e^+e^-$  où les fermions entrant ont même énergie dans le référentiel du laboratoire. Si besoin, la formulation covariante des amplitudes nous permettrait de faire facilement des transformations de Lorentz. Nous prendrons aussi la représentation standard des matrices  $\gamma^\mu$  de Dirac. Notons enfin que dans l'exemple présent, nous regardons des paires de fermions entrantes ou sortantes. Le cas où un fermion entre et l'autre sort se généralise très facilement.

Afin de s'affranchir des impulsions des fermions, on calcule les spineurs dans leur référentiel propre :

$$u(p_-) = \frac{\not{p}_- + m_-}{\sqrt{E_- + m_-}} u_0(h_-) \quad (9.3)$$

$$v(p_+) = -\frac{\not{p}_+ - m_+}{\sqrt{E_+ + m_+}} v_0(h_+) \quad (9.4)$$

où

$$u_0(h_-) = \begin{pmatrix} \chi_-(h_-) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_0(h_+) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_+(h_+) \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

et  $\chi_{\pm}$  sont deux vecteurs propres des opérateurs d'hélicité des fermions et antifermions. Les valeurs des hélicités ( $h_{\pm}$ ) sont choisies normalisées à  $\pm 1$ . Nous noterons dans la suite  $N_{\pm} = (E_{\pm} + m_{\pm})^{-1/2}$ .

---

<sup>(1)</sup>Des variantes de cette forme existent dans la littérature, voir [36, 106]. Une autre technique de calcul avec des spineurs a été développé par Hagiwara et Zeppenfeld[107] en se ramenant à des spineurs de Weyl. Cette méthode donne un algorithme rapide de calcul mais ne présente pas le résultat sous une forme explicitement covariante.

Nous avons donc :

$$\mathcal{M}_{in} = -N_-N_+tr[(\not{p}_- + m_-)u_0(h_-)\bar{v}_0(h_+)(\not{p}_+ - m_+)\mathcal{O}] \quad (9.6)$$

$$\mathcal{M}_{out} = -N_-N_+tr[(\not{p}_+ - m_+)v_0(h_+)\bar{u}_0(h_-)(\not{p}_- + m_-)\mathcal{O}] \quad (9.7)$$

$$v_0(h_+) = \gamma^5 \begin{pmatrix} \chi_+(h_+) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_0(h_+) = -(\chi_+^\dagger, 0)\gamma^0\gamma^5 \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{in} = & \\ N_-N_+tr \left[ (\not{p}_- + m_-) \begin{pmatrix} \chi_-(h_-)\chi_+^\dagger(h_+) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0\gamma^5(\not{p}_+ - m_+)\mathcal{O} \right] & (9.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{out} = & \\ -N_-N_+tr \left[ (\not{p}_+ - m_+)\gamma^5 \begin{pmatrix} \chi_+(h_+)\chi_-^\dagger(h_-) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0(\not{p}_- + m_-)\mathcal{O} \right] & (9.10) \end{aligned}$$

Si nous notons alors  $\Omega_1 = \chi_-(h_-)\chi_+^\dagger(h_+)$  et  $\Omega_2 = \chi_+(h_+)\chi_-^\dagger(h_-) = \Omega_1^\dagger$ , ces matrices peuvent être exprimées dans la base de Pauli :

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

$$= a_{11}\frac{1+\sigma^3}{2} + a_{22}\frac{1-\sigma^3}{2} + a_{12}\frac{\sigma^1+i\sigma^2}{2} + a_{21}\frac{\sigma^1-i\sigma^2}{2} \quad (9.12)$$

$$= \frac{1}{4}(aI_2 + \vec{b}\vec{\sigma}) \quad (9.13)$$



$$\begin{aligned} a &= 2(a_{11} + a_{22}) \\ \vec{b} &= 2 \begin{pmatrix} a_{12} + a_{21} \\ i(a_{12} - a_{21}) \\ a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et de même nous avons :  $\Omega_2 = \frac{1}{4}(a^* I_2 + \vec{b}^* \vec{\sigma})$ . Notons aussi que la matrice  $\gamma^0$  agit dans les traces comme l'identité sur les matrices contenant  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ . Ces matrices  $4 \times 4$  peuvent alors être exprimées dans la base de Dirac de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left( a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \vec{b} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.14)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left( a I_4 + \vec{b} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (9.15)$$

$$= \frac{1 + \gamma^0}{8} (a + \vec{b} \vec{\gamma} \gamma^5) \quad (9.16)$$

$$= \frac{1 + \gamma^0}{8} (a - \not{B} \gamma^5) \quad (9.17)$$

avec  $B^\mu = (0, \vec{b})$ . Si on insère l'expression précédente dans notre amplitude on obtient :

$$\mathcal{M}_{in} = \frac{N_- N_+}{8} \text{tr}[(\not{p}_- + m_-)(1 + \gamma^0)(a - \not{B} \gamma^5) \gamma^5 (\not{p}_+ - m_+) \mathcal{O}] \quad (9.18)$$

$$\mathcal{M}_{out} = -\frac{N_- N_+}{8} \text{tr}[(\not{p}_+ - m_+) \gamma^5 (1 + \gamma^0)(a^* - \not{B}^* \gamma^5) (\not{p}_- + m_-) \mathcal{O}] \quad (9.19)$$

Et comme nous sommes placés dans le centre de masse des deux fermions on peut écrire :

$$\gamma^0 = \frac{\not{p}_+ + \not{p}_-}{E_+ + E_-} = \frac{\not{p}_+ + \not{p}_-}{\sqrt{s}} \quad (9.20)$$

ce qui donne :

$$\mathcal{M}_{in} = \frac{N_- N_+}{8\sqrt{s}} \text{tr}[(\not{p}_- + m_-)(\sqrt{s} + \not{p}_+ + \not{p}_-)(a\gamma^5 - \not{B})(\not{p}_+ - m_+)\mathcal{O}] \quad (9.21)$$

$$\mathcal{M}_{out} = -\frac{N_- N_+}{8\sqrt{s}} \text{tr}[(\not{p}_+ - m_+)(\sqrt{s} - \not{p}_+ - \not{p}_-)(a^*\gamma^5 + \not{B}^*)(\not{p}_- + m_-)\mathcal{O}] \quad (9.22)$$

Les équations précédentes sont assez générales, mais nous allons les simplifier pour le cas où on peut négliger la masse des fermions. Ce sera notre cas pratique car nous regarderons des collisions à de très hautes énergies et cette approximation est alors excellente. Elle donne tout d'abord :

$$\mathcal{M}_{in} = \frac{1}{4s} \text{tr}[\not{p}_-(\sqrt{s} + \not{p}_- + \not{p}_+)(a\gamma^5 - \not{B})\not{p}_+\mathcal{O}] \quad (9.23)$$

$$\mathcal{M}_{out} = -\frac{1}{4s} \text{tr}[\not{p}_+(\sqrt{s} - \not{p}_- - \not{p}_+)(a^*\gamma^5 + \not{B}^*)\not{p}_-\mathcal{O}] \quad (9.24)$$

Si maintenant nous écrivons la forme la plus générale d'un opérateur dans la base des matrices de Dirac nous avons :

$$\mathcal{O} = \alpha I + \beta \gamma^5 + \phi_1 + \phi_2 \gamma^5 + o_{3\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \quad (9.25)$$

où  $o_{3\mu\nu}$  est un tenseur antisymétrique et les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{4} \text{tr}[\mathcal{O}] & \beta &= \frac{1}{4} \text{tr}[\mathcal{O}\gamma^5] \\
o_1^\mu &= \frac{1}{4} \text{tr}[\mathcal{O}\gamma^\mu] & o_2^\mu &= \frac{1}{4} \text{tr}[\mathcal{O}\gamma^5\gamma^\mu] \\
o_{3\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{tr}[\mathcal{O}\sigma^{\mu\nu}]
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{in} &= -\frac{a\sqrt{s}}{8} \text{tr}[\mathcal{O}\gamma^5] + \frac{a}{\sqrt{s}} o_{3\mu\nu} p_{-\alpha} p_{+\beta} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&\quad - \frac{B \cdot p_+}{4} \text{tr}[\mathcal{O}] - \frac{1}{4\sqrt{s}} \text{tr}[\not{p}_- \not{B} \not{p}_+ (\phi_1 + \phi_2 \gamma^5)] \quad (9.26)
\end{aligned}$$

Et de même pour  $\mathcal{M}_{out}$ . Le dernier terme peut être exprimé d'une façon plus simple. Mais pour faire cela, nous aurons à calculer explicitement B. Dans le cas simplifié où on prend l'axe  $[Oz)$  de quantification dans la direction de l'impulsion du fermion, l'antifermion allant dans la direction opposée, on a :

$$\chi_-(h_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + h_- \\ 1 - h_- \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \chi_+(h_+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + h_+ \\ 1 - h_+ \end{pmatrix}$$

Dans le cas général et en coordonnées sphériques on a :

$$\chi_-(\theta, \varphi, h_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} (\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) + h_- (\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2))) \\ e^{-i\varphi/2} (\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) - h_- (\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2))) \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

et  $\chi_+(\theta', \varphi', h_+) = \chi_-(\theta', \varphi', -h_+)$ . Mais dans notre cas simple nous avons :

$$a = 1 + h_- h_+ \quad (9.28)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 - h_- h_+ \\ i(h_- - h_+) \\ h_- + h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ i\delta \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (9.29)$$

On a les propriétés remarquables :  $\omega^2 = \delta^2 = 2\omega$ ,  $\omega\delta = 2\delta$ ,  $\omega\sigma = \delta\sigma = 0$ . On a alors assez facilement  $tr[\not{p}_- \not{B} \not{p}_+ (\phi_1 + \phi_2 \gamma^5)] = -s \tilde{B} \cdot (2o_1 + \delta o_2)$  où  $\tilde{B}^\mu = (0, \omega, i\delta, 0)$  est en fait le même quadrivecteur que  $B$  mais pour lequel  $\sigma$  vaudrait 0. Comme  $\omega = \delta^2/2$ , on peut voir que ce terme, qui est le seul qui reste pour de nombreux processus, vaut 0 si on a les mêmes hélicités pour  $f$  et  $\bar{f}$ . Cette propriété vient du fait que beaucoup de processus ne font intervenir que des bosons vecteurs et la conservation de l'hélicité est prédite par la théorie de jauge. Par conséquent, au lieu de garder  $\tilde{B}$ , on peut se limiter à utiliser  $\eta^\mu = (0, 1, i\varepsilon, 0)$  tel que  $\tilde{B} = 2\eta\delta_{h_+, -h_-}$ , où  $\varepsilon = \pm 1$  est l'hélicité du fermion  $f$ . Avec cette convention, le dernier terme vaut  $\frac{\sqrt{s}}{4} tr[(1 + \varepsilon\gamma^5)\not{O}]$  et on a finalement :

$$\mathcal{M}_{in} = -\frac{\delta_{h_-, h_+}}{2\sqrt{s}} tr[\not{O} \not{p}_- \not{p}_+ \gamma^5] - \frac{\delta_{h_-, h_+} \varepsilon \sqrt{s}}{4} tr[\not{O}] + \delta_{h_+, -h_-} \frac{\sqrt{s}}{4} tr[(1 + \varepsilon\gamma^5)\not{O}] \quad (9.30)$$

## 9.1 Remarques

- Pour deux fermions dos à dos où face à face mais ne se déplaçant pas dans la direction  $[Oz]$ , il y a une rotation qui transporte le vecteur  $\vec{b}$  que nous venons de voir vers le vrai vecteur  $\vec{b}$ . Plus précisément, si on note :

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$(\theta = 0, \varphi = 0) \rightarrow (\theta, \varphi \neq 0) \quad (9.31)$$

$$\vec{b} \rightarrow R_2 \cdot R_1(\vec{b}) \quad (9.32)$$

- La formule précédente obtenue pour  $\mathcal{M}_{in}$  n'est valable que pour des fermions de masse nulle allant dans la direction de l'axe  $[Oz]$ . Cela peut être facilement généralisé dans le cas massif mais le résultat est un peu plus compliqué.
- Les spineurs sont normalisés tels que  $\bar{u}u = 2m_-$  ,  $\bar{v}v = -2m_+$ .
- Avec nos notations, l'indice  $-$  représente le fermion et  $+$  l'antifermion, et non la charge des particules.

## 9.2 Application a la production de paires de neutrinos

La technique peut être un peu améliorée en évitant de faire intervenir des demi-angles qui engendrent des “défauts topologiques”<sup>(2)</sup> qui sont de plus numériquement gênants puisqu'ils nécessitent des conventions de signes supplémentaires liées aux axes de référence.

En représentation chirale on fait directement apparaître les spineurs de Weyl qui s'écrivent:

$$\Phi_L = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_R = \sqrt{E} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

---

<sup>(2)</sup>Ce que j'appelle défaut topologique est seulement le fait qu'une rotation de  $2\pi$  engendre un signe, et n'est donc pas directement invariant. Mais c'est bien sûr une qualité pour obtenir la statistique de Fermi-Dirac!

et on a alors:

$$v(p')\bar{u}(p) = \sqrt{EE'} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Phi_L(p')\Phi_L^\dagger(p) & \Omega & 0 \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

$$= \sqrt{EE'}\gamma^0 \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dots = \sqrt{EE'}\frac{1-\gamma^5}{8}\not{p} \quad (9.35)$$

en utilisant la notation  $a^0 = 2(\Omega_{11} + \Omega_{22})$ ,  $a^1 = -2(\Omega_{12} + \Omega_{21})$ ,  $a^2 = -2i(\Omega_{12} - \Omega_{21})$ ,  $a^3 = -2(\Omega_{11} - \Omega_{22})$ . Lorsque les neutrinos ne sont pas dos-à-dos,  $a^0$  n'est pas nul et on peut lui imposer d'être réel en multipliant par sa phase et on obtient la forme suivante pour  $a^\mu$ :

$$a^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{1+\vec{n}\cdot\vec{n}'} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\vec{n}\cdot\vec{n}'}}(\vec{n} + \vec{n}' + i\vec{n}\wedge\vec{n}') \end{pmatrix} \quad (9.36)$$

On constate de visu que  $a^\mu$  est perpendiculaire aux impulsions des neutrinos, et qu'il représente en fait un mode de polarisation elliptique associé au vecteur  $\vec{n} - \vec{n}'$ . On a donc recombiné les deux spin-(1/2) pour former un spin-1.

### 9.3 Symétries de l'équation de Dirac

Dans cette section, je vais rappeler les différentes symétries connues de l'équation de Dirac qui ont ou n'ont pas de rôle physique. Ces rappels sont destinés à faire apparaître la complexité des fermions, et les subtilités que cela implique lorsqu'on est amené à écrire des amplitudes hélicité impliquant des fermions (comme on vient d'en expliciter une méthode dans la section précédente). Le lagrangien de Dirac est

en effet simple à écrire :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (9.37)$$

Les équations du mouvement sont du premier ordre, et la nature fermionique des champs qu'elle décrit est regroupé dans les matrices  $\gamma^\mu$  de Dirac ou plus mathématiquement dans l'algèbre de Clifford associée à l'espace de Minkowski<sup>(3)</sup>.

Mais observons les différentes symétries de cette équation :

- Les premières symétries qui viennent à l'esprit sont celles qui engendrent des courants de Noether standards: symétrie par translation (qui n'apporte pas plus d'information que les équations du mouvement), par transformation de Lorentz, et l'invariance de jauge (ici globale à moins de rajouter un champ de jauge dans l'équation). L'invariance de jauge vient d'un groupe  $U(1)_{\text{jauge}}$ , et les spineurs se transforment par transformation de Lorentz à l'aide de matrices unitaires de la forme  $\exp(i\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}/2)$  dont l'expression est assez simple en représentation chirale.
- Le terme “représentation” que nous venons d'utiliser est employé dans la littérature pour signifier deux choses différentes. La première signification concerne les propriétés par transformation de Lorentz, et comme on vient de le rappeler dans l'alinéa précédent, les spineurs (fonctions d'ondes) se transforment selon une représentation irréductible du groupe de Lorentz[109, 110]. L'autre signification concerne les matrices de Dirac. Le lagrangien de Dirac est en effet invariant par changement de représentation des matrices  $\gamma^\mu$ , c'est à dire en effectuant la transformation  $\gamma^\mu \rightarrow U\gamma^\mu U^{-1}$  et  $\psi \rightarrow U\psi$  avec  $U \in U(4)$  <sup>(4)</sup>. Cette

---

<sup>(3)</sup> Si  $M$  est une algèbre de dimension  $n$  sur laquelle est définie un produit scalaire  $\langle, \rangle$ , l'algèbre de Clifford associée  $\mathcal{E}$  est constituée d'éléments vérifiant  $\{a, b\} = 2\langle a, b \rangle$ . Dans le cas de Minkowski on a effectivement  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ . Une définition plus mathématique et rigoureuse consiste à quotienter l'algèbre des tenseurs par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $a \otimes (x \otimes x - \langle x, x \rangle) \otimes b$ , avec  $a$  et  $b$  homogènes. (voir [108])

<sup>(4)</sup>  $U(4)$  est le groupe des matrices  $4 \times 4$  à coefficients complexes et unitaires, i.e.  $U^{-1} = U^\dagger$ .

symétrie n'est *a priori* pas physique et encombre les calculs d'un arbitraire très important.

- L'axe de quantification du spin. On y pense rarement mais on se rend compte dans la plupart des calculs explicites que l'on prend toujours l'axe  $[Oz]$  pour mesurer le spin. C'est en fait un choix arbitraire, sauf pour le cas des fermions de masse nulle pour lesquels la notion de spin n'a de sens que dans la direction de l'impulsion de cette particule, ce que l'on appelle l'hélicité.

Y a t'il des relations entre ces symétries? La réponse est oui. Par exemple l'intersection entre Lorentz et le groupe de Clifford  $U(4)$  est composé des rotations. Une propriété non triviale du groupe de Poincaré consiste dans le fait que les générateurs de groupe, qui sont des éléments de l'algèbre, se transforment comment des tenseurs. Autrement dit il y a une action naturelle du groupe sur l'algèbre, et cette contrainte donne immédiatement les relations de commutations des générateurs<sup>(5)</sup> sans même qu'on ait besoin de les calculer à partir d'une représentation explicite (voir [111] p. 60). Dans la représentation spinorielle du groupe de Lorentz <sup>(6)</sup>, les générateurs sont  $\sigma^{\mu,\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ , et dans la représentation chirale des matrices de Dirac on peut écrire une transformation de Lorentz sous la forme :

$$U(\Lambda) = e^{i/2\sigma^{\mu,\nu}\omega_{\mu,\nu}} = \quad (9.38)$$

$$\begin{pmatrix} e^{i/2\vec{\sigma}(\vec{\theta}+i\vec{\phi})} & 0 \\ 0 & e^{i/2\vec{\sigma}(\vec{\theta}-i\vec{\phi})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i/2\omega_{\mu,\nu}J^{\mu,\nu}} & 0 \\ 0 & e^{i/2\omega_{\mu,\nu}J^{*\mu,\nu}} \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

---

<sup>(5)</sup>  $[J^{\mu,\nu}, J^{\rho,\sigma}] = iJ_{\alpha,\beta}(g^{\alpha,\mu}g^{\beta,\rho}g^{\nu,\sigma} + g^{\alpha,\nu}g^{\beta,\sigma}g^{\mu,\rho} - g^{\alpha,\nu}g^{\beta,\rho}g^{\mu,\sigma} - g^{\alpha,\mu}g^{\beta,\sigma}g^{\nu,\rho})$

<sup>(6)</sup> Par représentation spinorielle on entend usuellement la représentation définie par les nombres  $(1/2, 1/2)$ . Cela signifie que cette représentation du groupe de Lorentz peut se voir comme étant composé de 2 fois le groupe  $SL(2, C)$  (les spineurs à 4 composantes sont alors formés de deux spineurs de Weyl à 2 composantes qui se transforment chacun indépendamment selon le groupe  $SL(2, C)$  des matrices  $2 \times 2$  complexes de déterminant 1, propriété qui se manifeste dans la représentation chirale les matrices  $\gamma^\mu$  de Dirac; notons encore une fois ici l'emploi dans deux significations distinctes du mot "représentation").



$$= \exp \left( \frac{i\omega_{\mu,\nu}}{2} \begin{pmatrix} J^{\mu,\nu} & 0 \\ 0 & J^{*\mu,\nu} \end{pmatrix} \right) \quad (9.40)$$

en posant  $J^{i,j} = \varepsilon^{ijk}\sigma^k/2$ ,  $J^{0,k} = \frac{i}{2}\sigma^k$ ,  $\omega^{i,j} = \varepsilon^{ijk}\theta^k$  et  $\omega^{0,i} = \phi^i$ .  $J^{\mu,\nu}$  et  $J^{*\mu,\nu}$  sont alors self et anti-self dual.

## 9.4 Lagrangiens quadratiques

### 9.4.1 Cas d'un champ de jauge abélien ( $U(1)_{em}$ )

Nous venons donc de voir que le spin est une notion délicate à manier pour les fermions, tant cette notion est présente sous différents aspects dans les fonctions d'onde. Une question que l'on peut se poser est alors de savoir si on peut séparer dans la théorie les contributions liées à la charge électrique (de type QED scalaire) des contributions dues au spin, à l'aide du tenseur  $\sigma^{\mu\nu}$ . Dans ce paragraphe je présente les calculs tels que je les ai dérivés pour obtenir cette décomposition et je montre qu'il suffit de faire une transformation (non triviale ?) sur les spineurs pour obtenir ce résultat.

L'équation de Dirac s'écrit :

$$(i\not{D} - m)\psi = 0 \quad (9.41)$$

avec  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ . Multiplions par l'opérateur conjugué  $-(i\not{D}^\dagger + m) = -(i(\not{\partial} - ie\not{A}) + m)$ .

$$-(i\mathcal{D}^\dagger + m)(i\mathcal{D} - m)\psi = 0 = (\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} + 2me\mathcal{A} + m^2)\psi \quad (9.42)$$

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} = (\mathcal{D} - ie\mathcal{A})(\mathcal{D} + ie\mathcal{A})\psi = \square\psi + e^2 A^2\psi + ie\mathcal{D}(\mathcal{A}\psi) - ie\mathcal{A}\mathcal{D}\psi \quad (9.43)$$

et on a :

$$\mathcal{A}\mathcal{D}\psi = \gamma^\mu \gamma^\nu A_\mu \partial_\nu \psi = 2g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \psi - \gamma^\nu \gamma^\mu A_\mu \partial_\nu \psi \quad (9.44)$$

$$= 2A_\mu \partial^\mu \psi - \mathcal{D}(\mathcal{A}\psi) + (\mathcal{D}\mathcal{A})\psi \quad (9.45)$$

Ce qui nous donne au bout du compte :

$$\square\psi + e^2 A^2\psi + m^2\psi + 2ie\mathcal{D}(\mathcal{A}\psi) + 2me\mathcal{A}\psi - 2ieA_\mu \partial^\mu \psi - ie(\mathcal{D}\mathcal{A})\psi = 0 \quad (9.46)$$

On veut alors éliminer les termes linéaires dans la masse et pour cela on peut réutiliser l'équation de Dirac comme suit :

$$(i\mathcal{D} - m)\psi = e\mathcal{A}\psi \quad (9.47)$$

$$(i\mathcal{D} + m)(i\mathcal{D} - m) = (i\mathcal{D} + m)e\mathcal{A}\psi \quad (9.48)$$

$$-\square\psi - m^2\psi = ie\mathcal{D}(\mathcal{A}\psi) + me\mathcal{A}\psi \quad (9.49)$$

et on obtient :

$$-\square\psi - m^2\psi + e^2 A^2\psi - 2ieA_\mu \partial^\mu \psi - ie(\mathcal{D}\mathcal{A})\psi = 0 \quad (9.50)$$

Et on montre facilement que  $i(\not{\partial}A) = i\partial_\mu A^\mu + \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}F_{\mu\nu}$  donc on a finalement pour nouvelle équation du mouvement :

$$\square\psi + m^2\psi - e^2 A^2\psi + 2ieA_\mu\partial^\mu\psi + ie(\partial_\mu A^\mu)\psi + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi = 0 \quad (9.51)$$

Considérons maintenant le lagrangien

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu - ieA_\mu)\bar{\psi}(\partial^\mu + ieA^\mu)\psi \quad (9.52)$$

$$= \partial_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\psi + e^2 A^2\bar{\psi}\psi + ie\partial_\mu\bar{\psi}A^\mu\psi - ieA_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\psi \quad (9.53)$$

Alors Euler-Lagrange donne :

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\bar{\psi}} = \square\psi + 2ieA_\mu\partial^\mu\psi + ie(\partial_\mu A^\mu)\psi - e^2 A^2\psi = 0 \quad (9.54)$$

Ce qui nous montre que la nouvelle équation du mouvement peut être dérivée du lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\bar{\psi}(\partial^\mu + ieA^\mu)\psi - m^2\bar{\psi}\psi - \frac{e}{2}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi \left( -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right) \quad (9.55)$$

Ce nouveaux lagrangien permet de calculer de nouvelles règles de Feynman et on constate sur de nombreux exemples que les amplitudes hélicités des processus électromagnétiques sont les mêmes qu'avec les anciennes règles à condition de normaliser les nouveaux spineurs par le facteur  $1/\sqrt{2m}$ . Notons aussi la nouvelle symétrie qui apparait dans la transformation  $\psi \rightarrow \exp(\beta\gamma_5)\psi$ .

Si on veut dériver ce lagrangien de façon plus formelle, il faut tenir compte de la réutilisation de l'équation de Dirac dans la procédure. En fait on réalise simplement la transformation suivante des champs <sup>(7)</sup> :

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \tag{9.56}$$

$$\psi \rightarrow (i\not{D} + m)\psi \tag{9.57}$$

Remarquons que l'opérateur agissant sur  $\psi$  n'est pas l'opérateur conjugué mais l'opérateur direct en changeant le signe de la masse. Cette transformation effectuée dans le lagrangien de Dirac, il suffit alors d'intégrer par parties pour obtenir le lagrangien précédent. Grâce à la mise en évidence de cette transformation des champs, on peut montrer directement le résultat précédent, à savoir que les amplitudes de diffusions que l'on calcule avec les nouvelles règles de Feynman (à l'arbre) sont égales à celles que l'on aurait calculé avec les anciennes règles. Pour cela il suffit d'invoquer le théorème de Coleman-Wess-Zumino [103] qui donne directement ce résultat pour n'importe quelle transformation des champs qui laisse l'origine ( $\psi = 0$ ) invariant. J'ai essayé d'employer cette technique dans le cas  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  où des difficultés apparaissent, dues à la violation de parité. Je n'ai pas obtenu de résultat intéressant dans ce cas<sup>(8)</sup>. Ce type de calcul a néanmoins déjà été effectué en QCD, dans l'optique de la factorisation des couleurs [112] (voir chapitre 3).

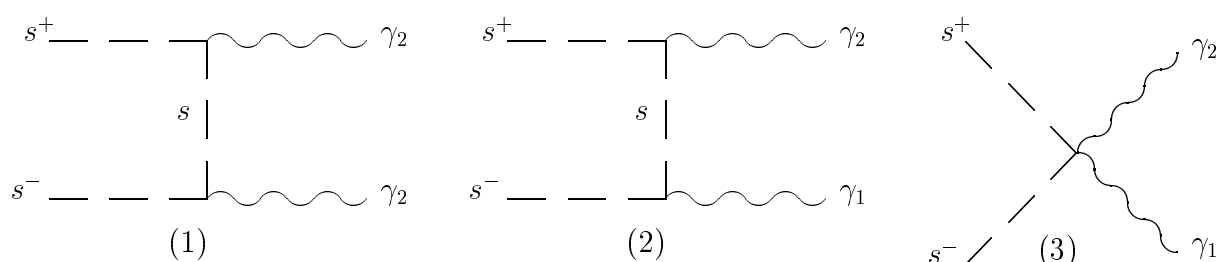
---

<sup>(7)</sup>Je me suis rendu compte en rédigeant cette thèse que l'idée "d'élever au carré" l'équation de Dirac est ancienne et que l'on retrouve ces calculs en 1957 dans [28].

<sup>(8)</sup>Le seul résultat positif a été obtenu pour  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ , mais ce cas est trop similaire à  $U(1)$  pour être intéressant.

## 9.5 Invariance de jauge en QED scalaire

Pour tester l'invariance de jauge dans une serie de graphes de Feynman, le cadre le plus simple est évidemment la QED scalaire. L'invariance de jauge de cette théorie est une nécessité pour assurer l'invariance par transformation de Lorentz des éléments de la matrice de diffusion. En effet, si on cherche à quantifier un champ de spin 1 sans masse, les “vecteurs” de polarisation ne peuvent se transformer comme un vecteur par une transformation de Lorentz. Par contre, la quantité  $f^{\mu,\nu} = p^\mu \varepsilon^\nu - p^\nu \varepsilon^\mu$  se transforme effectivement comme un tenseur. Ce qui sauve la théorie c'est justement que lorsqu'on remplace une polarisation de photon par l'impulsion correspondante dans une amplitude de diffusion, on doit obtenir 0. De sorte que le terme proportionnel à l'impulsion qui émerge des polarisations dans une transformation de Lorentz est absorbé par le reste de l'amplitude <sup>(9)</sup>. Une idée qui m'est venue à ce propos est de savoir s'il est possible de factoriser dans toute amplitude les tenseurs  $f^{\mu,\nu}$  associés à chaque photon de façon à extraire les parties invariantes de jauge. Prenons l'exemple très simple de deux scalaires chargés qui émettent deux photons. On a alors en QED scalaire les trois graphes suivant:



Utilisant les règles de Feynman usuelles on obtient :

<sup>(9)</sup>En effet, par une transformation de Lorentz appartenant au petit groupe de Poincaré, une polarisation  $\varepsilon(k)$  devient  $e^{i\theta}\tilde{\varepsilon}(k) + c k$  (voir [111], chap.8, ou encore [113]) où  $e^{i\theta}$  est une phase et  $c$  une constante.

$$\mathcal{M} = -ie^2 \frac{(\varepsilon_1 \cdot p_+)(\varepsilon_2 \cdot p_-)}{2(p_+ \cdot p_1)} - ie^2 \frac{(\varepsilon_2 \cdot p_+)(\varepsilon_1 \cdot p_-)}{2(p_+ \cdot p_2)} + \frac{ie^2}{2}(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \quad (9.58)$$

et après quelques manipulations, cette expression peut se re-écrire de la façon suivante :

$$\mathcal{M} = \frac{ie^2}{2} \frac{p_{+\nu} f_1^{\mu,\nu}}{(p_+ \cdot p_1)} g_{\mu,\alpha} \frac{p_{+\beta} f_2^{\alpha,\beta}}{(p_+ \cdot p_2)} \quad (9.59)$$

où  $f_1^{\mu,\nu}$  et  $f_2^{\alpha,\beta}$  sont les tenseurs  $p^\mu \varepsilon^\nu - p^\nu \varepsilon^\mu$  associés respectivement au photon 1 et 2.

Autre exemple qui nous concerne plus,  $\gamma H \rightarrow W^+ W^-$  peut se factoriser de cette façon et son amplitude peut s'écrire :

$$\mathcal{M}_{\gamma H \rightarrow W^+ W^-} = \frac{ie g M_W}{(p_\gamma p_+)(p_\gamma p_-)} f_\gamma^{\mu,\nu} ((p_\gamma \cdot (p_+ + p_-)) \varepsilon_\mu^- \varepsilon_\nu^+ - (\varepsilon^+ \cdot \varepsilon^-) p_\mu^- p_\nu^+) \quad (9.60)$$

D'un point de vue pratique, cette méthode peut peut-être donner lieu à des calculs analytiques et numériques plus simples grâce à la forme compacte du résultat obtenu. Est-ce qu'il existe une procédure générale pour factoriser les amplitudes de cette façon? Je pense qu'on peut effectivement le conjecturer. Nous avons déjà rencontré dans cette thèse ce genre de situation lorsque pour la désintégration du  $Z$  en trois photons nous avons re-écrit le Lagrangien en fonction des tenseurs self-dual et anti-self-dual, ce qui nous a donné des informations sur les combinaisons d'hélicité possibles. Et on peut se demander si on n'aurait pas pu obtenir l'expression de l'amplitude de façon plus directe. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que reformuler la théorie des champs en termes de  $F^{\mu,\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  comme variable

dynamique plutôt que le potentiel  $A^\mu$  est rendue impossible par l'existence de l'effet Aharonov-Bohm [114] (confirmé par l'expérience dans les années 60 [115]). Peut-être malgré tout est-ce faisable lorsqu'on étudie un nombre fini de particules ponctuelles (ce qu'on étudie en physique des hautes énergies). Cela suppose *a priori* qu'on se limite à l'ordre de l'arbre de la théorie des perturbations, car les ordres supérieurs font intervenir des effets de taille finie. Le raisonnement qui renforce la possible validité de cette conjecture est le suivant : l'effet Aharonov-Bohm est un effet de nature topologique, c'est à dire qu'il apparaît lorsque la topologie du problème que l'on étudie n'est pas simplement connexe<sup>(10)</sup>. C'est le cas par exemple en faisant diffracter un faisceau de particules autour d'un solénoïde extrêmement fin et de longueur quasi infini. Le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul et pourtant les particules voient leur franges de diffractions déplacées plus ou moins en fonction du courant passant dans le solénoïde. Mais si le problème auquel on s'intéresse est un ensemble fini de particules ponctuelles, sur lesquelles le champ d'interaction n'est pas forcément défini, la topologie réalisée ainsi est simplement connexe. Ce qui semble confirmer ce point, c'est la possibilité d'utiliser la jauge de Poincaré dans une telle topologie. En effet, celle-ci s'écrit :

$$A^\mu(x) = - \int_0^1 u du x^\nu F_{\mu,\nu}(ux) \quad (9.61)$$

On peut vérifier aisément que dès lors que  $\tilde{F}_{\mu,\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu,\nu,\rho,\sigma}F^{\rho,\sigma}$  vérifie  $\partial^\mu \tilde{F}_{\mu,\nu} = 0$ , on a bien  $F_{\mu,\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Autant cette jauge présente l'inconvénient d'être non-locale, autant elle a l'avantage d'être non-ambigüe sur l'ensemble où elle est défini<sup>(11)</sup>. Et justement, cette jauge est ici défini partout sauf aux points où sont placées les particules. Pour s'en convaincre, on constate sur la formule précédente que  $A^\mu$  est défini en un point  $x$  à la condition qu'aucune particule ne soit interposée entre ce point et l'origine. Par conséquent  $A^\mu$  est défini partout sauf sur un nombre fini de

---

<sup>(10)</sup> Autrement dit on ne peut pas toujours déformer continûment un lacet fermé pour le contracter en un point.

<sup>(11)</sup> La jauge de Poincaré définit complètement  $A^\mu$  sur son ensemble de définition, contrairement à la jauge covariante  $\partial_\mu A^\mu = 0$  qui laisse encore un arbitraire sur le choix de  $A^\mu$ .

demi-droites ayant pour origine les particules et allant dans la direction opposée au point origine (cela suppose bien sûr que celui-ci a été placé à l'endroit où se trouve une particule). Ensuite par continuité du potentiel dans le vide, celui-ci est défini partout sauf là où sont placées les particules (possibles singularités à ces endroits). Notons pour finir que dans cette “démonstration”, les points sont considérés dans l'espace de Minkowski (4 composantes).

Par conséquent si l'effet Aharonov-Bohm est bien absent lors de collisions de particules à haute énergie, peut-être est-il envisageable de reformuler dans ce cas la théorie des champs<sup>(12)</sup> en prenant comme variable dynamique du champ  $F_{\mu,\nu}$  plutôt que  $A_\mu$ . Ce point ne sera pas plus approfondi ici, laissant le lecteur apporter son esprit critique sur cette conjecture. Des tentatives ont déjà été faites dans la littérature, en utilisant des boucles de Wilson [116, 117, 118, 119]. Notons que l'approche que je développe est un peu différente, plus orientée vers les applications.

---

<sup>(12)</sup> Cette reformulation éventuelle s'entend au niveau classique de la théorie. Les corrections quantiques faisant intervenir des effets de taille finie, le raisonnement tenu ici est caduque.



# Chapitre 10

## Annexe B : règles de Feynman en jauge non linéaire

### 10.1 Conventions générales

Si on écrit le doublet de Higgs sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + i\varphi_3) \end{pmatrix}$$

et avec les conventions suivantes :

$$Z_\mu = c_W W_\mu^3 - s_W X_\mu \quad (10.1)$$

$$A_\mu = s_W W_\mu^3 + c_W X_\mu \quad (10.2)$$

$$g = e/s_W \quad (10.3)$$

$$g' = e/c_W \quad (10.4)$$

$$g_Z = e/s_W c_W \quad (10.5)$$

( $c_W = \cos(\theta_{Weinberg})$ ,  $s_W = \sin(\theta_{Weinberg})$ ,  $e$  est la valeur absolue de la charge de l'électron). On a pour la partie scalaire du lagrangien :

$$\begin{aligned}
 D_\mu \Phi &= \left( \partial_\mu + \frac{i}{2}(gW_\mu + g'YB_\mu) \right) \Phi \\
 &= \left[ \begin{aligned} &\partial_\mu \Phi^+ + \frac{ig_Z}{2}(2c_W s_W A_\mu + (c_W^2 - s_W^2)Z_\mu)\Phi^+ + \frac{ig}{2}W_\mu^+(v + H + i\varphi_3) \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu H + i\partial_\mu \varphi_3) + \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^-\Phi^+ - \frac{ig_Z}{2\sqrt{2}}Z_\mu(v + H + i\varphi_3) \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

la partie cinétique en  $\Phi$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \Phi)^2 &= \\
 &\partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi^- + \frac{g_Z^2}{4}(2c_W s_W A_\mu + (c_W^2 - s_W^2)Z_\mu)^2 \Phi^+ \Phi^- \\
 &+ \frac{g^2}{4}(W^+ \cdot W^-)((v + H)^2 + \varphi_3^2) \\
 &- i\partial^\mu \Phi^+ \left[ \frac{g_Z}{2}(2c_W s_W A_\mu + (c_W^2 - s_W^2)Z_\mu)\Phi^- + \frac{g}{2}W_\mu^-(v + H - i\varphi_3) \right] + \text{h.c.} \\
 &\frac{gg_Z}{4}\Phi^+(v + H - i\varphi_3)(2c_W s_W A_\mu + (c_W^2 - s_W^2)Z_\mu)W^{-\mu} + \text{h.c.} \\
 &+ \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_3)^2 + \frac{g^2}{2}(W^+ \cdot W^-)\Phi^+ \Phi^- + \frac{g_Z^2}{8}(Z \cdot Z)((v + H)^2 + \varphi_3^2) \\
 &- \frac{ig}{2}W^{+\mu}(\partial_\mu H + i\partial_\mu \varphi_3)\Phi^- + \frac{ig_Z}{4}Z^\mu(\partial_\mu H + i\partial_\mu \varphi_3)(v + H - i\varphi_3) + \text{h.c.} \\
 &- \frac{gg_Z}{4}(W^- \cdot Z)\Phi^+(v + H - i\varphi_3) + \text{h.c.}
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

et en posant :

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu} &= \left( \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + \frac{i}{2}g[W_\mu, W_\nu] \right) \\
 &= \frac{\tau^i}{2} \left( \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon^{ijk}W_\mu^j W_\nu^k \right)
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

et la partie Yang-Mills s'écrit :

$$\mathcal{L}_{YM} =$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W^{-\mu} - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{-\nu} \\
& + \frac{1}{2} \partial_\mu Z_\nu \partial^\nu Z^\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu Z_\nu \partial^\mu Z^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \\
& - ig(W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu})(c_W \partial_\mu Z_\nu + s_W \partial_\mu A_\nu) \\
& - ig(c_W Z^\mu + s_W A^\mu) [W^{+\nu} \partial_\mu W_\nu^- - W^{-\nu} \partial_\mu W_\nu^+] \\
& + ig(c_W Z^\nu + s_W A^\nu) [W^{+\mu} \partial_\mu W_\nu^- - W^{-\mu} \partial_\mu W_\nu^+] \\
& - g^2(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)^2 (W^+ \cdot W^-) + g^2[W_\mu^- (c_W Z^\mu + s_W A^\mu)][W_\nu^+ (c_W Z^\nu + s_W A^\nu)] \\
& + \frac{g^2}{2} (W^+ \cdot W^+) (W^- \cdot W^-) - \frac{g^2}{2} (W^+ \cdot W^-)^2
\end{aligned} \tag{10.9}$$

Le potentiel qui brise la symétrie s'écrit :

$$\mathcal{V}_{SSB} = \lambda \left[ \Phi^\dagger \Phi - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right]^2 \tag{10.10}$$

avec  $\mu^2, \lambda > 0$  pour assurer la brisure de symétrie. Les masses des  $W^\pm$  et du Higgs sont :

$$M_W = \frac{gv}{2} \quad M_H^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2 \quad v = 246 \text{ GeV} \tag{10.11}$$

et si on prend pour fixer la jauge les 3 lagrangiens suivants :

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{2\xi_\gamma} (\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{2\xi_\gamma} (G^A)^2 \tag{10.12}$$

$$\mathcal{L}_Z = -\frac{1}{2\xi_Z} (\partial_\mu Z^\mu + \xi_Z \frac{g_Z}{2} (v + \tilde{\varepsilon} H) \varphi_3)^2 = -\frac{1}{2\xi_Z} (G^Z)^2 \tag{10.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_W &= -\frac{1}{\xi_W} |\partial_\mu W^{+\mu} + ie\tilde{\alpha}(A \cdot W^+) + i\tilde{\beta}gc_W(Z \cdot W^+)|^2 \\
&+ i\xi_W \frac{g}{2} (v + \tilde{\delta} H - i\tilde{\kappa}\varphi_3) \Phi^+|^2 = -\frac{1}{\xi_W} (G^+ G^-)
\end{aligned} \tag{10.14}$$

un changement de jauge infinitésimal s'écrivant :

**Tableau II:** *Variations de jauge des champs.*

$\frac{\delta W_\mu^\pm}{\delta \theta^A} = \mp ie W_\mu^\pm$	$\frac{\delta W_\mu^\pm}{\delta \theta^Z} = \mp ig c_W W_\mu^\pm$	$\frac{\delta W_\mu^\pm}{\delta \theta^\pm} = \partial_\mu \cdot \pm ig(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)$	$\frac{\delta W_\mu^\pm}{\delta \theta^\mp} = 0$
$\frac{\delta Z_\mu}{\delta \theta^A} = 0$	$\frac{\delta Z_\mu}{\delta \theta^Z} = \partial_\mu \cdot$	$\frac{\delta Z_\mu}{\delta \theta^\pm} = \mp ig c_W W_\mu^\mp$	
$\frac{\delta A_\mu}{\delta \theta^A} = \partial_\mu \cdot$	$\frac{\delta A_\mu}{\delta \theta^Z} = 0$	$\frac{\delta A_\mu}{\delta \theta^\pm} = \mp ie W_\mu^\mp$	
$\frac{\delta \Phi^\pm}{\delta \theta^A} = \mp ie \Phi^\pm$	$\frac{\delta \Phi^\pm}{\delta \theta^Z} = \mp i \frac{g_Z(c_W^2 - s_W^2)}{2} \Phi^\pm$	$\frac{\delta \Phi^\pm}{\delta \theta^\pm} = \mp \frac{ig}{2}(v + H \pm i\varphi_3)$	$\frac{\delta \Phi^\pm}{\delta \theta^\mp} = 0$
$\frac{\delta H}{\delta \theta^A} = 0$	$\frac{\delta H}{\delta \theta^Z} = -\frac{g_Z}{2} \varphi_3$	$\frac{\delta H}{\delta \theta^\pm} = \pm \frac{ig}{2} \Phi^\mp$	
$\frac{\delta \varphi_3}{\delta \theta^A} = 0$	$\frac{\delta \varphi_3}{\delta \theta^Z} = \frac{g_Z}{2}(v + H)$	$\frac{\delta \varphi_3}{\delta \theta^\pm} = -\frac{g}{2} \Phi^\mp$	

$$\delta W_\mu^\pm = \partial_\mu \theta^\pm \mp ig W_\mu^\pm (c_W \theta^Z + s_W \theta^A) \pm ig \theta^\pm (c_W Z_\mu + s_W A_\mu) \quad (10.15)$$

$$\delta Z_\mu = \partial_\mu \theta^Z + ig c_W (W_\mu^+ \theta^- - W_\mu^- \theta^+) \quad (10.16)$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \theta^A + ie (W_\mu^+ \theta^- - W_\mu^- \theta^+) \quad (10.17)$$

$$\delta \Phi^\pm = \mp \frac{ig}{2} (v + H \pm i\varphi_3) \theta^\pm \mp \frac{ig_Z}{2} \Phi^\pm (2c_W s_W \theta^A + (c_W^2 - s_W^2) \theta^Z) \quad (10.18)$$

$$\delta H = \frac{ig}{2} (\theta^+ \Phi^- - \theta^- \Phi^+) - \frac{g_Z}{2} \theta^Z \varphi_3 \quad (10.19)$$

$$\delta \varphi_3 = \frac{g}{2} (\theta^+ \Phi^- + \theta^- \Phi^+) + \frac{g_Z}{2} \theta^Z (v + H) \quad (10.20)$$

ce que l'on a résumé dans le tableau II.

Avec nos conventions pour fixer la jauge, le lagrangien des fantômes de Faddeev

s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\bar{\eta}^\alpha \frac{\delta G^\alpha}{\delta \theta^\beta} \eta^\beta$$

et on a :

$$\frac{\delta G^A}{\delta \theta^A} = \partial_\mu \partial^\mu . \quad (10.21)$$

$$\frac{\delta G^A}{\delta \theta^Z} = 0 \quad (10.22)$$

$$\frac{\delta G^A}{\delta \theta^\pm} = \mp i e \partial_\mu W^{\mp\mu} \quad (10.23)$$

$$\frac{\delta G^Z}{\delta \theta^A} = 0 \quad (10.24)$$

$$\frac{\delta G^Z}{\delta \theta^Z} = \partial_\mu \partial^\mu \cdot + \xi_Z \frac{g_Z^2}{4} ((v + \tilde{\varepsilon} H)(v + H) - \tilde{\varepsilon} \varphi_3^2) \quad (10.25)$$

$$\frac{\delta G^Z}{\delta \theta^\pm} = \mp i g c_W \partial^\mu W_\mu^\mp - \xi_Z \frac{g^2}{4 c_W} (v + \tilde{\varepsilon} H) \Phi^\mp \pm \frac{i \xi_Z \tilde{\varepsilon} g^2}{4 c_W} \Phi^\mp \varphi_3 \quad (10.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta G^\pm}{\delta \theta^A} = & \mp i e \partial_\mu W^{\pm\mu} \pm i e \tilde{\alpha} W_\mu^\pm \partial^\mu \cdot + e^2 \tilde{\alpha} A^\mu W_\mu^\pm + \frac{e^2 c_W}{s_W} \tilde{\beta} W_\mu^\pm Z^\mu \\ & + \frac{e^2 \xi_W}{2 s_W} (v + \tilde{\delta} H \mp i \tilde{\kappa} \varphi_3) \Phi^\pm \end{aligned} \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta G^\pm}{\delta \theta^Z} = & \mp i g c_W \partial^\mu W_\mu^\pm + \frac{e^2 \tilde{\alpha} c_W}{s_W} A^\mu W_\mu^\pm + \frac{e^2 c_W^2 \tilde{\beta}}{s_W^2} Z^\mu W_\mu^\pm \\ & \pm \frac{i e c_W \tilde{\beta}}{s_W} W_\mu^\pm \partial^\mu \cdot + \frac{g_Z^2 \xi_W c_W}{4} (\tilde{\kappa} (v + H) \mp i \tilde{\delta} \varphi_3) \Phi^\pm \\ & + \frac{g_Z^2 \xi_W (c_W^2 - s_W^2) c_W}{4} (v + \tilde{\delta} H \mp i \varphi_3 \tilde{\kappa}) \Phi^\pm \end{aligned} \quad (10.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta G^\pm}{\delta \theta^\pm} = & \partial_\mu \partial^\mu \cdot \pm i e (\partial_\mu A^\mu + \tilde{\alpha} A^\mu \partial_\mu \cdot) \pm i g c_W (\partial_\mu Z^\mu + \tilde{\beta} Z^\mu \partial_\mu \cdot) \\ & + (W^+ \cdot W^-) (e^2 \tilde{\alpha} + g^2 c_W^2 \tilde{\beta}) - (Z \cdot A) s_W c_W g^2 (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \\ & - e^2 \tilde{\alpha} (A \cdot A) - g^2 c_W^2 \tilde{\beta} (Z \cdot Z) - \frac{g^2 \xi_W}{4} (\tilde{\delta} + \tilde{\kappa}) (\Phi^+ \Phi^-) \\ & + \frac{g^2 \xi_W}{4} (v^2 + v(1 + \tilde{\delta}) H \pm i v(1 - \tilde{\kappa}) \varphi_3 + \tilde{\delta} H^2 \\ & \pm i H \varphi_3 (\tilde{\delta} - \tilde{\kappa}) + \tilde{\kappa} \varphi_3^2) \end{aligned} \quad (10.29)$$

$$\frac{\delta G^\pm}{\delta \theta^\mp} = -(e^2 \tilde{\alpha} + g^2 c_W \tilde{\beta}) (W^\pm W^\pm) + \frac{g^2 \xi_W}{4} (\Phi^\pm \Phi^\pm) (\tilde{\delta} - \tilde{\kappa}) \quad (10.30)$$

A partir de là on peut dériver toutes les règles de Feynman dans notre jauge, qui

sont données dans les sections suivantes.

## 10.2 Règles de Feynman

### Propagateurs

$$\Pi_{\mu\nu}^W = \frac{-i}{k^2 - M_W^2} \left[ g_{\mu\nu} + \frac{(\xi_W - 1)k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi_W M_W^2} \right] \quad (10.31)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^Z = \frac{-i}{k^2 - M_Z^2} \left[ g_{\mu\nu} + \frac{(\xi_Z - 1)k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi_Z M_Z^2} \right] \quad (10.32)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^\gamma = \frac{-i}{k^2} \left[ g_{\mu\nu} + \frac{(\xi_\gamma - 1)k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \quad (10.33)$$

$$\Pi^H = \frac{i}{k^2 - m_H^2} \quad (10.34)$$

$$\Pi^{\varphi_3} = \frac{i}{k^2 - \xi_Z M_Z^2} \quad (10.35)$$

$$\Pi^{\Phi^\pm} = \frac{i}{k^2 - \xi_W M_W^2} \quad (10.36)$$

$$\Pi^{\eta_\gamma} = \frac{i\xi_\gamma}{k^2} \quad (10.37)$$

$$\Pi^{\eta_Z} = \frac{i\xi_Z}{k^2 - \xi_Z M_Z^2} \quad (10.38)$$

$$\Pi^{\eta^\pm} = \frac{i\xi_W}{k^2 - \xi_W M_W^2} \quad (10.39)$$

### vertex $\Phi^3$

Dans la suite toutes les impulsions sont considérées comme entrante.

$$\begin{array}{c}
W^{+\alpha}(p_+) \\
\text{---} [ \gamma^\mu; Z^\mu ](k) \text{---} \\
W^{-\beta}(p_-)
\end{array}
- ie \left[ 1; \frac{c_W}{s_W} \right] \left[ g_{\alpha\beta}(p_- - p_+)_\mu + \left( 1 + \frac{\tilde{\alpha}}{\xi_W} \right) (k_\alpha g_{\mu\beta} - k_\beta g_{\mu\alpha}) \right. \\
\left. + \left( 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{\xi_W} \right) (g_{\mu\alpha} p_{+\beta} - g_{\mu\beta} p_{-\alpha}); \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\beta} \right]$$

Remarquons que si  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  sont égaux, le tenseur est le même à une constante multiplicative près. Le premier terme représente le courant de charge (ou de convection) et ne dépend pas de la façon dont on fixe la jauge. Les deux autres termes viennent du courant de spin.

$$\begin{array}{c}
W^{\pm\nu}(p_W) \\
\text{---} [ \gamma^\mu; Z^\mu ] \text{---} \\
\varphi^\mp(p_\varphi)
\end{array}
ig^{\mu\nu} [eM_W(1 - \tilde{\alpha}); -gM_Z(1 - c_W^2(1 - \tilde{\beta}))]$$

On peut si besoin éliminer les vertex  $W^\pm \varphi^\mp Z$  et  $W^\pm \varphi^\mp \gamma$ . Pour éliminer ce dernier il faut prendre  $\alpha = 1$  qui simplifie aussi le vertex  $WW\gamma$  ainsi que  $WW\gamma\gamma$ ), alors que pour éliminer  $W^\pm \varphi^\mp Z$ , on doit prendre  $\tilde{\beta} = -s_W^2/c_W^2$  qui ne rend pas vraiment plus simple d'autres vertex. Notons aussi que ces vertex ne dépendent pas de  $\xi_W$ , et qu'il est impossible d'éliminer les autres vertex trilinéaires.

$$\begin{array}{c}
[W^{+\rho}(p_+); Z^\rho] \\
\text{---} H \text{---} \\
[W^{-\sigma}(p_-); Z^\sigma]
\end{array}
ig^{\rho\sigma} [gM_W; g_Z M_Z]$$

$$\begin{array}{c}
 W^{\pm\mu}(p_W) \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 H \text{ --- } \quad \quad \quad \pm i \frac{g}{2} ((1 - \tilde{\delta})p_\varphi - (1 + \tilde{\delta})p_H)^\mu \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \varphi^\mp(p_\varphi)
 \end{array}$$

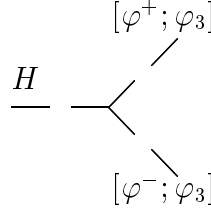
$\varphi_3$  ————  $\begin{array}{c} \nearrow W^{\pm\mu}(p_W) \\ \searrow \varphi^\mp(p_\varphi) \end{array}$      $-\frac{g}{2}((1-\tilde{\kappa})p_\varphi - (1+\tilde{\kappa})p_{\varphi_3})^\mu$

$$[\gamma^\mu; Z^\mu] \begin{array}{c} \nearrow \varphi^+(p_+) \\ \searrow \varphi^-(p_-) \end{array} - i \left[ e; g_Z \frac{c_W^2 - s_W^2}{2} \right] (p_+ - p_-)^\mu$$

$$\frac{H}{\text{---}} \text{---} \begin{array}{c} \nearrow Z^\mu \\ \searrow \varphi_3 \end{array} \quad \frac{g_Z}{2} ((1 + \tilde{\varepsilon})p_H - (1 - \tilde{\varepsilon})p_{\varphi_3})^\mu$$

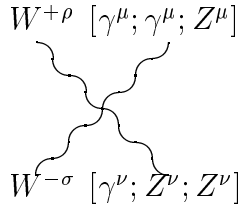
$$\begin{array}{c}
H \\
\diagup \\
H \text{ --- } \text{---} \text{---} \text{---} \\
\diagdown \\
H
\end{array}
\quad - \frac{3igM_H^2}{2M_W}$$



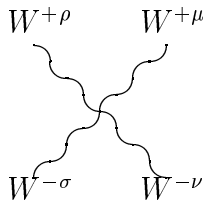


$$\left[ -\frac{ig}{2M_W} (M_H^2 + 2\xi_W \tilde{\delta} M_W^2); (g \rightarrow g_Z, M_W \rightarrow M_Z, \xi_W \rightarrow \xi_Z, \tilde{\delta} \rightarrow \tilde{\varepsilon}) \right]$$

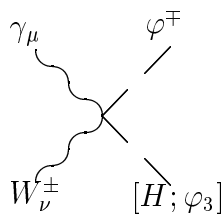
### Vertex $\Phi^4$



$$\begin{aligned} & -ie^2 [1; c_W/s_W; c_W^2/s_W^2] (2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \\ & - (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) [(1 - \tilde{\alpha}^2/\xi_W); (1 - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}/\xi_W); (1 - \tilde{\beta}^2/\xi_W)]) \end{aligned}$$

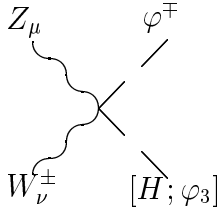


$$ig^2 (2g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}))$$



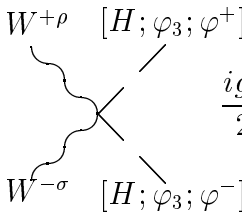
$$[i(1 - \tilde{\alpha}\tilde{\delta}); \mp(1 - \tilde{\alpha}\tilde{\kappa})] \frac{ge}{2} g_{\mu\nu}$$

Notons qu'il n'est pas suffisant de prendre  $\tilde{\alpha} = 1$  pour éliminer ce vertex.

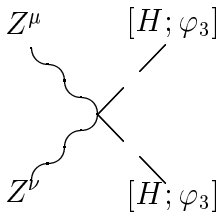


$$[-i(1 - c_W^2(1 - \tilde{\beta}\tilde{\delta})) ; \pm(1 - c_W^2(1 - \tilde{\beta}\tilde{\kappa}))] \frac{gg_Z}{2} g_{\mu\nu}$$

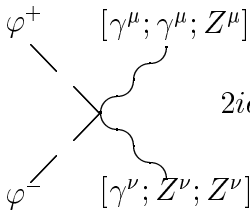
Notons que si  $\tilde{\delta} = \tilde{\kappa} = 1$  alors la même condition qui élimine le vertex  $W^\pm \varphi^\mp Z$ , élimine ce vertex aussi.



$$\frac{ig^2}{2} g^{\rho\sigma}$$



$$\frac{ig_Z^2}{2} g^{\mu\nu}$$



$$2ie^2 \left[ 1; \frac{c_W^2 - s_W^2}{2s_W c_W}; \left( \frac{c_W^2 - s_W^2}{2s_W c_W} \right)^2 \right] g^{\mu\nu}$$

$$\begin{array}{ccc}
[H; \varphi_3; \varphi^\pm] & [H; \varphi_3; \varphi^\pm] & \\
& \diagdown \quad \diagup & \\
& \times & \\
& \diagup \quad \diagdown & \\
[H; \varphi_3; \varphi^\mp] & [H; \varphi_3; \varphi^\mp] &
\end{array}
\quad -i \frac{g^2 M_H^2}{2M_W^2} \left[ \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right]$$

$$\begin{array}{ccc}
H & & \varphi_3 \\
& \diagdown \quad \diagup & \\
& \times & \\
& \diagup \quad \diagdown & \\
H & & \varphi_3
\end{array}
\quad -\frac{ig^2}{4M_W^2} (M_H^2 + 2M_Z^2 \tilde{\varepsilon}^2 \xi_Z)$$

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^+ & & [H; \varphi_3] \\
& \diagdown \quad \diagup & \\
& \times & \\
& \diagup \quad \diagdown & \\
\varphi^- & & [H; \varphi_3]
\end{array}
\quad -\frac{ig^2}{4M_W^2} [M_H^2 + 2M_W^2 \tilde{\delta}^2 \xi_W; M_H^2 + 2M_W^2 \tilde{\kappa}^2 \xi_W]$$

## Couplages des fantômes de Faddeev-Popov.

$$W^{\pm\mu} \begin{array}{c} \nearrow [\bar{\eta}_{\gamma}; \bar{\eta}_Z](\bar{p}) \\ \searrow \eta_{\mp} \end{array} \quad \pm i \bar{p}^{\mu} [e; g c_W]$$

$$W^{\pm\mu} \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta}_{\pm}(\bar{p}) \\ \searrow [\eta_{\gamma}; \eta_Z](p) \end{array} \quad \mp i [e; g c_W] (\bar{p} + [\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}] p)^{\mu}$$

$$[H; \varphi^{\pm}] \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta}_Z \\ \searrow [\eta_Z; \eta_{\mp}] \end{array} \quad -\frac{i m_Z \xi_Z}{2} [g_Z (1 + \tilde{\varepsilon}); -g]$$

$$\varphi^{\pm} \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta}_{\pm} \\ \searrow [\eta_{\gamma}; \eta_Z] \end{array} \quad -i M_W \xi_W [e; \frac{g_Z}{2} (\tilde{\kappa} + c_W^2 - s_W^2)]$$

$$[\gamma^{\mu}; Z^{\mu}] \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta}_{\pm}(\bar{p}) \\ \searrow \eta_{\pm}(p) \end{array} \quad \pm i [e; g c_W] (\bar{p} - [\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}] p)^{\mu}$$

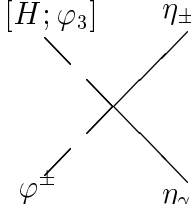
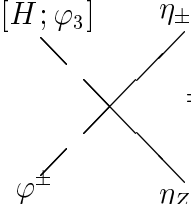
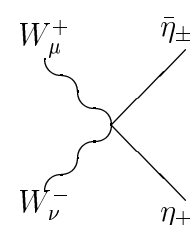
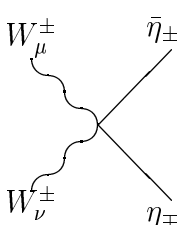
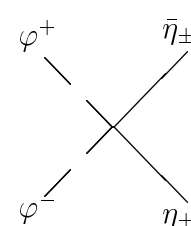
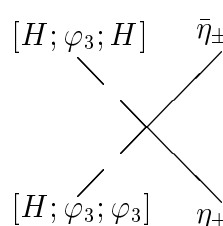
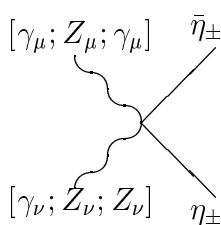
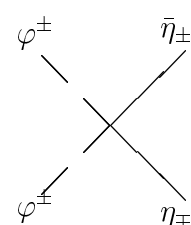
$$[H; \varphi_3] \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta}_{\pm} \\ \searrow \eta_{\pm} \end{array} \quad [-i(1 + \tilde{\delta}); \pm(1 - \tilde{\kappa})] \frac{g M_W \xi_W}{2}$$

$$\begin{array}{c} [H; \varphi_3] \nearrow \bar{\eta}_Z \\ [H; \varphi_3] \searrow \eta_Z \end{array} \quad [-; +] i \xi_Z \tilde{\varepsilon} \frac{g_Z^2}{2}$$

$$\begin{array}{c} [H; \varphi_3] \nearrow \bar{\eta}_{\pm} \\ \varphi^{\pm} \searrow \eta_{\pm} \end{array} \quad [i; \mp 1] \tilde{\varepsilon} \xi_Z \frac{g g_Z}{4}$$

$$W_{\mu}^{\pm} \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta}_{\pm} \\ \searrow \eta_{\mp} \end{array} \quad -i e g_{\mu\nu} [e \tilde{\alpha}; g c_W \tilde{\beta}]$$

$$W_{\mu}^{\pm} \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta}_{\pm} \\ \searrow \eta_{\mp} \end{array} \quad -\frac{i e^2 c_W}{s_W} g_{\mu\nu} [\tilde{\alpha}; \tilde{\beta} \frac{c_W}{s_W}]$$

	$-\frac{e^2 \xi_W}{2s_W} [i\tilde{\delta}; \pm\tilde{\kappa}]$		$= -\frac{gg_Z \xi_W}{4} [i(\tilde{\kappa} + \tilde{\delta}(c_W^2 - s_W^2));$ $\pm(\tilde{\delta} + \tilde{\kappa}(c_W^2 - s_W^2))]$
	$-i(e^2 \tilde{\alpha} + g^2 c_W^2 \tilde{\beta}) g_{\mu\nu}$		$2i(e^2 \tilde{\alpha} + g^2 c_W^2 \tilde{\beta}) g_{\mu\nu}$
	$i \frac{g^2 \xi_W}{4} (\tilde{\delta} + \tilde{\kappa})$		$-\frac{g^2 \xi_W}{4} [2i\tilde{\delta}; 2i\tilde{\kappa}; \pm(\tilde{\kappa} - \tilde{\delta})]$
	$i[2e^2 \tilde{\alpha}; 2g^2 c_W^2 \tilde{\beta}; g^2 c_W s_W (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})] g_{\mu\nu}$		$i \frac{g^2 \xi_W}{2} (\tilde{\kappa} - \tilde{\delta})$

Remarque : les règles précédentes ont été obtenues par la procédure de Faddeev-Popov [120]. Si on considère plus fondamentale la symétrie BRS [121], et que l'on exige que l'action soit à la fois BRS **et** anti-BRS symétrique, alors des vertex quarks dans les fantômes apparaissent (par exemple avec une jauge non-linéaire comme ici) (voir [122] p21). Ces vertex n'interviennent qu'à partir de deux boucles.



# Chapitre 11

## Annexe C : identités de Ward-Takahashi

### 11.1 Identités de Ward-Takahashi

Cette annexe est destinée à montrer quelles équations de contraintes sont imposées par l'invariance de jauge formelle qui existe dans la théorie électrofaible. Le groupe de jauge  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  possède 4 générateurs et par conséquent, 4 variations infinitésimales de jauge sont possibles (avec les paramètres  $\theta^A$ ,  $\theta^Z$  et  $\theta^\pm$  pour reprendre les conventions des règles de Feynman vues en annexe B). Le lagrangien qui fixe la jauge est noté :

$$\mathcal{L}_{gauge\ fixing} = -\frac{1}{2\xi^a} F_a^2(W^\pm, A, Z, H, \varphi_3, \varphi^\pm) \quad (11.1)$$

où  $a$  est un indice valant  $A$ ,  $Z$  ou  $\pm$  pour écrire d'une façon générique les trois lagrangiens écrits dans l'annexe B (eq. (10.12), (10.13) et (10.14)).

Pour les fermions, on se limitera ici juste à une famille de leptons ce qui nous suffira amplement. On note :

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

Les variations infinitésimales de  $\theta^\pm$  dans l'action donnent la relation suivante :

$$\begin{aligned} 0 = & \left[ \frac{1}{2\xi^a} \partial_\mu \left( \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} \right) \mp \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} ig(c_W Z_\mu + s_W A_\mu) \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta A_\mu} ie W_\mu^\mp \right. \\ & \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta Z_\mu} ig c_W W_\mu^\mp \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi^\pm} \frac{ig}{2} (v + H \pm i\varphi_3) \mp \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta H} \frac{ig}{2} \varphi^\mp + \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi_3} \frac{g}{2} \varphi^\mp \\ & - (\partial_\mu \mp ig(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)) J_\pm^\mu \mp ig c_W W_\mu^\mp J_Z^\mu \mp ie W_\mu^\mp J_A^\mu \\ & \mp \frac{ig}{2} (v + H \pm i\varphi_3) J_{\varphi^\pm} \pm \frac{ig}{2} \varphi^\mp J_H - \frac{g}{2} \varphi^\mp J_{\varphi_3} \\ & \left. - \frac{ig}{\sqrt{2}} (\bar{\eta}_{\nu_e} e_L - \bar{\nu}_e \eta_{e_L} + \bar{\eta}_{e_L} \nu_e - \bar{e}_L \eta_{\nu_e}) \right] W(J_A, J_Z, J_\pm, J_H, J_{\varphi^\pm}, J_{\varphi_3}, \eta_L, \bar{\eta}_L, \eta_R, \bar{\eta}_R) \end{aligned} \quad (11.3)$$

Les variations de  $\theta^A$  donnent :

$$\begin{aligned} 0 = & \left[ \frac{1}{2\xi^a} \partial_\mu \left( \frac{\delta F_a^2}{\delta A_\mu} \right) \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} ie W_\mu^\pm \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi^\pm} ie \varphi^\mp \right. \\ & - \partial_\mu J_A^\mu \mp ie W_\mu^\pm J_\pm^\mu \mp ie \varphi^\mp J_{\varphi^\pm} \\ & \left. - ie (\bar{\eta}_R e_R - \bar{e}_R \eta_R + \bar{\eta}_{\nu_e} \nu_e - \bar{\nu}_e \eta_{\nu_e}) \right] W(J_A, J_Z, J_\pm, J_H, J_{\varphi^\pm}, J_{\varphi_3}, \eta_L, \bar{\eta}_L, \eta_R, \bar{\eta}_R) \end{aligned} \quad (11.4)$$

Les variations de  $\theta^Z$  donnent :

$$\begin{aligned} 0 = & \left[ \frac{1}{2\xi^a} \partial_\mu \left( \frac{\delta F_a^2}{\delta Z_\mu} \right) \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} ig c_W W_\mu^\pm \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi^\pm} \frac{ig_Z}{2} (c_W^2 - s_W^2) \varphi^\mp \right. \\ & + \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta H} \frac{g_Z}{2} \varphi_3 - \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi_3} \frac{g_Z}{2} (v + H) \\ & - \partial_\mu J_Z^\mu \mp ig c_W W_\mu^\pm J_\pm^\mu \mp \frac{ig_Z}{2} (c_W^2 - s_W^2) J_{\varphi^\pm} \varphi^\pm \\ & \left. - \frac{g_Z}{2} J_H \varphi_3 + \frac{g_Z}{2} (v + H) J_{\varphi_3} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +ie \left( \frac{s_W}{c_W} (\bar{\eta}_R e_R - \bar{e}_R \eta_R) + \frac{(c_W^2 - s_W^2)}{c_W s_W} (\bar{\eta}_{\nu_e} \nu_e - \bar{\nu}_e \eta_{\nu_e}) + \frac{1}{2c_W s_W} (\bar{\eta}_{e_L} e_L - \bar{e}_L \eta_{e_L}) \right) \\
& \left. \right] W(J_A, J_Z, J_{\pm}, J_H, J_{\varphi^{\pm}}, J_{\varphi_3}, \eta_L, \bar{\eta}_L, \eta_R, \bar{\eta}_R)
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Dans ces équations,  $W$  est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes, et dans les crochets, les champs devraient normalement être remplacés par des dérivés par rapport aux sources classiques (i.e.  $A^\mu \rightarrow \frac{\delta}{\delta J_A^\mu}$ ,  $e_L \rightarrow \frac{\delta}{\delta \eta_{e_L}}$  ...). C'est pour ne pas surcharger l'écriture de ces équations que j'ai choisi cette présentation. Par dérivations (par rapport aux sources) successives de ces expressions on obtient des relations de contraintes entre fonctions de Green. Un exemple a été donné au chapitre 3 page 32.

Et on obtient pour la fonctionnelle de vertex :

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ \frac{1}{2\xi^a} \partial_\mu \left( \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} \right) \mp \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} ig(c_W Z_\mu + s_W A_\mu) \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta A_\mu} ie W_\mu^\mp \right. \\
& \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta Z_\mu} ig c_W W_\mu^\mp \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi^\pm} \frac{ig}{2} (v + H \pm i\varphi_3) \mp \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta H} \frac{ig}{2} \varphi^\mp + \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi_3} \frac{g}{2} \varphi^\mp \\
& + (\partial_\mu \mp ig(c_W Z_\mu + s_W A_\mu)) \frac{\delta?}{\delta W_\mu^\pm} \pm ig c_W W_\mu^\mp \frac{\delta?}{\delta Z_\mu} \pm ie W_\mu^\mp \frac{\delta?}{\delta A_\mu} \\
& \pm \frac{ig}{2} (v + H \pm i\varphi_3) \frac{\delta?}{\delta \varphi^\pm} \mp \frac{ig}{2} \varphi^\mp \frac{\delta?}{\delta H} + \frac{g}{2} \varphi^\mp \frac{\delta?}{\delta \varphi_3} \\
& \left. + \frac{ig}{\sqrt{2}} \left( \frac{\delta?}{\delta \bar{\nu}_e} e_L - \bar{\nu}_e \frac{\delta?}{\delta e_L} + \frac{\delta?}{\delta \bar{e}_L} \nu_e - \bar{e}_L \frac{\delta?}{\delta \nu_e} \right) \right]
\end{aligned} \tag{11.6}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ \frac{1}{2\xi^a} \partial_\mu \left( \frac{\delta F_a^2}{\delta A_\mu} \right) \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} ie W_\mu^\pm \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi^\pm} ie \varphi^\mp \right. \\
& + \partial_\mu \frac{\delta?}{\delta A_\mu} \pm ie W_\mu^\pm \frac{\delta?}{\delta W_\mu^\pm} \pm ie \varphi^\mp \frac{\delta?}{\delta \varphi^\pm} \\
& \left. + ie \left( \frac{\delta?}{\delta \bar{e}_R} e_R - \bar{e}_R \frac{\delta?}{\delta e_R} + \frac{\delta?}{\delta \bar{\nu}_e} \nu_e - \bar{\nu}_e \frac{\delta?}{\delta \nu_e} \right) \right]
\end{aligned} \tag{11.7}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ \frac{1}{2\xi^a} \partial_\mu \left( \frac{\delta F_a^2}{\delta Z_\mu} \right) \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta W_\mu^\pm} i g c_W W_\mu^\pm \pm \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi^\pm} \frac{i g_Z}{2} (c_W^2 - s_W^2) \varphi^\mp \right. \\
& + \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta H} \frac{g_Z}{2} \varphi_3 - \frac{1}{2\xi^a} \frac{\delta F_a^2}{\delta \varphi_3} \frac{g_Z}{2} (v + H) \\
& + \partial_\mu \frac{\delta?}{\delta Z^\mu} \pm i g c_W W_\mu^\pm \frac{\delta?}{\delta W_\mu^\pm} \pm \frac{i g_Z}{2} (c_W^2 - s_W^2) \frac{\delta?}{\delta \varphi^\pm} \varphi^\pm \\
& + \frac{g_Z}{2} \frac{\delta?}{\delta H} \varphi_3 - \frac{g_Z}{2} (v + H) \frac{\delta?}{\delta \varphi_3} \\
& - i e \left( \frac{s_W}{c_W} \left( \frac{\delta?}{\delta \bar{e}_R} e_R - \bar{e}_R \frac{\delta?}{\delta e_R} \right) + \frac{(c_W^2 - s_W^2)}{c_W s_W} \left( \frac{\delta?}{\delta \bar{\nu}_e} \nu_e - \bar{\nu}_e \frac{\delta?}{\delta \nu_e} \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2c_W s_W} \left( \frac{\delta?}{\delta \bar{e}_L} e_L - \bar{e}_L \frac{\delta?}{\delta e_L} \right) \right) \right] \quad (11.8)
\end{aligned}$$

et on remarque que si l'on pose  $?^0 = ? + F_a^2/(2\xi^a)$  on peut réécrire ces identités sous une forme un peu plus compacte :

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ (\partial_\mu \mp i g (c_W Z_\mu + s_W A_\mu)) \frac{\delta?^0}{\delta W_\mu^\pm} \pm i g c_W W_\mu^\mp \frac{\delta?^0}{\delta Z^\mu} \pm i e W_\mu^\mp \frac{\delta?^0}{\delta A^\mu} \right. \\
& \pm \frac{i g}{2} (v + H \pm i \varphi_3) \frac{\delta?^0}{\delta \varphi^\pm} \mp \frac{i g}{2} \varphi^\mp \frac{\delta?^0}{\delta H} + \frac{g}{2} \varphi^\mp \frac{\delta?^0}{\delta \varphi_3} \\
& \left. + \frac{i g}{\sqrt{2}} \left( \frac{\delta?^0}{\delta \bar{\nu}_e} e_L - \bar{\nu}_e \frac{\delta?^0}{\delta e_L} + \frac{\delta?^0}{\delta \bar{e}_L} \nu_e - \bar{e}_L \frac{\delta?^0}{\delta \nu_e} \right) \right] \quad (11.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ + \partial_\mu \frac{\delta?^0}{\delta A^\mu} \pm i e W_\mu^\pm \frac{\delta?^0}{\delta W_\mu^\pm} \pm i e \varphi^\mp \frac{\delta?^0}{\delta \varphi^\pm} \right. \\
& \left. + i e \left( \frac{\delta?^0}{\delta \bar{e}_R} e_R - \bar{e}_R \frac{\delta?^0}{\delta e_R} + \frac{\delta?^0}{\delta \bar{\nu}_e} \nu_e - \bar{\nu}_e \frac{\delta?^0}{\delta \nu_e} \right) \right] \quad (11.10)
\end{aligned}$$

$$0 = \left[ \partial_\mu \frac{\delta?^0}{\delta Z^\mu} \pm i g c_W W_\mu^\pm \frac{\delta?^0}{\delta W_\mu^\pm} \pm \frac{i g_Z}{2} (c_W^2 - s_W^2) \frac{\delta?^0}{\delta \varphi^\pm} \varphi^\pm \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_Z}{2} \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta H} \varphi_3 - \frac{g_Z}{2} (v + H) \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta \varphi_3} \\
& - ie \left( \frac{s_W}{c_W} \left( \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta \bar{e}_R} e_R - \bar{e}_R \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta e_R} \right) + \frac{(c_W^2 - s_W^2)}{c_W s_W} \left( \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta \bar{\nu}_e} \nu_e - \bar{\nu}_e \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta \nu_e} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2c_W s_W} \left( \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta \bar{e}_L} e_L - \bar{e}_L \frac{\delta \mathcal{L}^0}{\delta e_L} \right) \right) \Big] \quad (11.11)
\end{aligned}$$

Le fait d'écrire les identités de Ward comme l'action de polynômes différentiels sur  $\mathcal{L}^0$  a son importance. En effet, comme on se place ici explicitement à l'ordre des arbres,  $\mathcal{L}$  se réduit à l'action classique.  $\mathcal{L}^0$  n'est donc que l'action classique à laquelle on rajoute ce qu'on a précédemment retranché pour fixer la jauge. On peut donc exprimer ces identités de façon diagrammatique entre des fonctions de Green calculées comme si la fixation de jauge était absente. C'est d'ailleurs à partir de cette formulation utilisant l'action effective  $\mathcal{L}$  que 't Hooft a développé une forme diagrammatique de ces identités. Grâce à ces relations entre diagrammes, il a pu montrer la renormalisabilité des théories de jauge spontanément brisées [22].



# Chapitre 12

## Annexe D. Factorisation de l'espace de phase

### 12.1 Cas de trois particules dans l'état final, avec deux désintégrations primaires

Dans cette annexe nous allons détailler le calcul qui nous permet d'assimiler le processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$  au processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H \rightarrow W^+W^-b\bar{b}$ . De cette façon on montre que cela a un sens de parler du sous processus  $\gamma\gamma \rightarrow H$  ( $M_H > 2M_W$ ) en l'assimilant au processus  $W^+W^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$  dont on calcule la section efficace au pic du Higgs ( $s = M_H^2$ ).

Ecrivons alors la section efficace de ce processus :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{F} \int \frac{d^4 p_b}{(2\pi)^3} \delta(p_b^2 - m_b^2) \theta(p_b^0) \frac{d^4 p_{\bar{b}}}{(2\pi)^3} \delta(p_{\bar{b}}^2 - m_{\bar{b}}^2) \theta(p_{\bar{b}}^0) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_{autres} + p_b + p_{\bar{b}} - (\sqrt{s}, \vec{0})) |\mathcal{M}|^2 d^?_{autres} \end{aligned} \quad (12.1)$$

Nous avons posé ici  $F$  pour le facteur de flux et  $d^?_{autres}$  désigne l'élément différentiel d'espace de phase qui concerne les autres particules que les quarks  $b$  et  $\bar{b}$ . Maintenant posons  $p_H = p_b + p_{\bar{b}}$  et  $q = p_b - p_{\bar{b}}$ , et négligeons  $m_b^{(1)}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{16F} \int \frac{d^4 p_H}{(2\pi)^3} \delta\left(\frac{p_H^2}{4} + \frac{q^2}{4} + \frac{p_H q}{2}\right) \theta(p_b^0) \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta\left(\frac{p_H^2}{4} + \frac{q^2}{4} - \frac{p_H q}{2}\right) \theta(p_{\bar{b}}^0) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_{autres} + p_H - (\sqrt{s}, \vec{0})) |\mathcal{M}|^2 d^?_{autres} \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \left| \frac{\mathcal{M}_0 \mathcal{M}(H \rightarrow b\bar{b})}{p_H^2 - m_H^2 + i?_H m_H} \right|^2 \quad (12.3)$$

$$|\mathcal{M}_{sub}|^2 = \left| \frac{(g m_W (\varepsilon_L^+ \cdot \varepsilon_L^-)) \mathcal{M}(H \rightarrow b\bar{b})}{p_H^2 - m_H^2 + i?_H m_H} \right|^2 \quad (12.4)$$

Où  $\mathcal{M}_{sub}$  est l'amplitude du processus  $W^+ W^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$ . En combinant les deux fonctions delta on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2F} \int \frac{d^4 p_H}{(2\pi)^3} \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(p_H^2 + q^2) \delta(p_H q) \theta(p_H^0 - |q^0|) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_{autres} + p_H - (\sqrt{s}, \vec{0})) |\mathcal{M}|^2 d^?_{autres} \end{aligned} \quad (12.5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2F} \int \frac{d^3 \vec{p}_H}{(2\pi)^3 2\sqrt{(\vec{p}_H)^2 - q^2}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(p_H q) \theta(p_H^0 - |q^0|) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_{autres} + p_H - (\sqrt{s}, \vec{0})) |\mathcal{M}|^2 d^?_{autres} \end{aligned} \quad (12.6)$$

---

<sup>(1)</sup> La seule contribution utile de  $m_b$  est dans le couplage  $Hb\bar{b}$ .

Il va falloir dans la suite tenir compte du fait que le propagateur du Higgs favorise un Higgs sur couche de masse. On va en effet pouvoir utiliser la limite suivante quand  $p_H^2 \rightarrow 0$  :

$$1/((p_H^2 - m_H^2)^2 + p_H^2 m_H^2) \rightarrow \frac{\pi}{p_H m_H} \delta(p_H^2 - m_H^2) \quad (12.7)$$

et on a alors<sup>(2)</sup> :

$$\left| \frac{\mathcal{M}(H \rightarrow b\bar{b})}{p_H^2 - m_H^2 + i p_H m_H} \right|^2 \simeq 16\pi^2 \delta(p_H^2 - m_H^2) = 16\pi^2 \delta(q^2 + m_H^2) \quad (12.8)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{F} \int 8\pi^2 \frac{d^3 \vec{p}_H}{(2\pi)^3 2E_H} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} \delta(p_H q) \theta(p_H^0 - |q^0|) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_{autres} + p_H - (\sqrt{s}, \vec{0})) |\mathcal{M}_0|^2 d\Omega_{autres} \end{aligned} \quad (12.9)$$

La forme que prend la section efficace se rapproche de plus en plus de celle du processus  $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-H$ . Reste encore à intégrer sur les trois composantes du vecteur  $\vec{q}$ . La contrainte restante  $\delta(p_H q)$  fixe un angle entre l'impulsion  $\vec{p}_H$  (que l'on peut maintenant appeler impulsion du Higgs) et l'impulsion différentielle  $\vec{q}$ . Plus précisément on peut écrire :

$$\frac{d^3 \vec{q}}{2q^0} \delta(p_H q) \theta(p_H^0 - |q^0|) = \frac{|\vec{q}|^2 d|\vec{q}| d\cos(\hat{\theta}) d\Phi}{2q^0} \delta(|\vec{q}| |\vec{p}_H| \cos(\hat{\theta}) - p_H^0 q^0) \theta(p_H^0 - |q^0|)$$

---

<sup>(2)</sup> Ici  $\Gamma_H = \Gamma(H \rightarrow b\bar{b}) = \frac{1}{32\pi} \frac{g^2 m_b^2 M_H}{M_W^2}$  et on a  $|\mathcal{M}(H \rightarrow b\bar{b})|^2 = \frac{g^2 m_b^2 M_H^2}{2M_W^2}$ .

$$= \frac{|\vec{q}|^2 d|\vec{q}| d\cos(\hat{\theta}) d\Phi}{2q^0 |\vec{q}| |\vec{p}_H|} \delta\left(\cos(\hat{\theta}) - \frac{p_H^0 q^0}{|\vec{q}| |\vec{p}_H|}\right) \theta(p_H^0 - |q^0|) \quad (12.10)$$

où  $\cos(\hat{\theta})$  est l'angle entre  $\vec{q}$  et  $\vec{p}_H$ . On peut alors immédiatement faire l'intégrale sur  $\Phi$  et  $\cos(\hat{\theta})$  ce qui donne<sup>(3)</sup> :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{F} \int \frac{d^3 \vec{p}_H}{(2\pi)^3 2E_H} (2\pi)^4 \delta^4(p_{autres} + p_H - (\sqrt{s}, \vec{0})) |\mathcal{M}_0|^2 d^?_{autres} \times \\ &\quad \int_{m_H}^{\sqrt{m_H^2 + (\vec{p}_H)^2}} \frac{|\vec{q}| d|\vec{q}|}{|\vec{p}_H| \sqrt{(\vec{q})^2 - m_H^2}} \end{aligned} \quad (12.11)$$

Et la dernière intégrale vaut 1 ce qui finalement donne :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{F} \int \frac{d^3 \vec{p}_H}{(2\pi)^3 2E_H} (2\pi)^4 \delta^4(p_{autres} + p_H - (\sqrt{s}, \vec{0})) |\mathcal{M}_0|^2 d^?_{autres} \\ &= \sigma(\gamma\gamma \rightarrow W^+ W^- H) \end{aligned} \quad (12.12)$$

En conclusion de ces calculs on peut dire que le cas de trois particules dans l'état final se déduit par généralisation du cas à 4 particules dans l'état final en utilisant la conversion suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma\gamma \rightarrow W^+ W^- H) &= \sigma(\gamma\gamma \rightarrow W^+ W^- H \rightarrow W^+ W^- b\bar{b}) \\ &= \int d\tau \mathcal{L}(\tau) \sigma_{(W^+ W^- \rightarrow b\bar{b})}(\sqrt{\tau s}) \end{aligned}$$

---

<sup>(3)</sup>La fonction  $\theta(p_H^0 - |q^0|)$  impose la condition  $|\vec{q}|^2 < 2m_H^2 + |\vec{p}_H|^2$  et pour que la condition sur  $\cos(\hat{\theta})$  soit possible ( $\cos(\hat{\theta}) \leq 1$ ), il faut une contrainte plus forte  $|\vec{q}|^2 < m_H^2 + |\vec{p}_H|^2$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{\Gamma_H M_H} \int d\tau \delta(\tau s - M_H^2) \mathcal{L}(\tau) \Gamma_H^2 M_H^2 \sigma_{(W^+ W^- \rightarrow b\bar{b})}(M_H) \\
&= \mathcal{L}(M_H^2/s) \frac{\pi \Gamma_H M_H}{s} \sigma_{(W^+ W^- \rightarrow b\bar{b})}(M_H) \\
&= \mathcal{L}(M_H^2/s) \frac{2\alpha\pi^2 M_H^2}{\sin^2(\theta_W) M_W^2 s} \times \frac{1 - 2M_W^2/M_H^2}{\sqrt{1 - 4M_W^2/M_H^2}} \quad (12.13)
\end{aligned}$$

et en ayant utilisé comme largeur du Higgs dans son propagateur  $\Gamma_H = \Gamma(H \rightarrow b\bar{b})$ . L'équation (12.12) est relativement intuitive en fait, mais nous venons de la justifier. La largeur totale que nous avons utilisée dans le propagateur est telle que le rapport de branchement du Higgs en  $b\bar{b}$  à été pris égal à 1 pour simplifier.



# Bibliographie

- [1] **S. L. Glashow**, “Partial-symmetries of weak interactions”, Nucl.Phys.**22** (1961) 579-588.
- [2] **S. Weinberg**, “A model of leptons”, Phys.Rev.Lett.**19** (1967) 1264-1266.
- [3] **S. L. Glashow, A. Salam, S. Weinberg**, *1979 Nobel Lectures*, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) p515 (Weinberg), p525 (Salam), p539 (Glashow).
- [4] **G. Arnison et al (UA1 collaboration)**, “Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at  $\sqrt{s} = 540 \text{ GeV}$ ”, Phys.Lett.**B122** (1983) 103-116.
- [5] **G. Arnison et al (UA1 collaboration)**, “Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around  $95 \text{ GeV}/c^2$  at the CERN SPS collider”, Phys.Lett.**B126** (1983) 398-410.
- [6] **S. Weinberg**, “Implications of dynamical symmetry breaking”, Phys.Rev.**D13** (1976) 974-996.
- [7] **R. Bönisch, C. Grosse-Knetter, R. Kögerler**, “Bounds on BESS model parameters from vector boson production in  $e^+e^-$  collisions” Z.Phys. **C59** (1993) 109-115. (Limites pour NLC)  
**R. Bönisch, R. Kögerler**, “Phenomenological parameter analysis of a higgsless electroweak gauge theory with induced interactions included”, Int. J. of Mod. Phys. **A7** 5475-5498. (Limites de LEP1).

- [8] **P. Chiappetta**, “Latest developpements on the BESS model”, *HEP-PH/9411284*.
- [9] **R. Casalbuoni et al.**, “Constraints on the BESS model from precision electroweak data. Specialization to technicolor and extended technicolor”, *Phys. Lett.* **B269** (1991) 361-370.
- [10] **A. P. Balachandran, A. Stern, G. Trahern**, “Nonlinear models as gauge models”, *Phys. Rev.* **D19** (1978) 2416-2425.
- [11] **P. W. Higgs**, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields”, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132-133, “Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons”, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156-1163, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons”, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508-509.
- [12] **J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg**, “Broken symmetries”, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965-970.
- [13] **J. Goldstone**, “Field Theories with <<Superconductor>> Solutions”, *Il Nuovo Cimento* **19** (1961) 154-164.
- [14] **M. Gell-Mann**, “A schematic model of baryons and mesons”, *Phys. Lett.* **8** (1964) 214-215.
- [15] **M. Froissart**, “Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation”, *Phys. Rev.* **123** (1961), 1053-1057.
- [16] **T. Kinoshita, J. J. Loeffel, A. Martin**, “Upper bounds for the scattering amplitude at high energy”, *Phys. Rev.* **135** (1964) B1464-1482.
- [17] **J. M. Cornwall, D. N. Levin and G. Tiktopoulos**, “Derivation of gauge invariance from high-energy unitarity bounds on the S matrix”, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 1145-1167.
- [18] **C. N. Yang, R. L. Mills**, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance”, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191-195.

- [19] **H. Van Dam, M. J. G. Veltman**, “Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields”, Nucl.Phys.**B22** (1970) 397-411.
- [20] **M. J. G. Veltman**, “Generalized Ward identities and Yang-Mills Fields”, Nucl.Phys.**B21** (1970) 288-302.
- [21] **M. Chanowitz and M. K. Gaillard**, “The TeV physics of strongly interacting W’s and Z’s”, Nucl.Phys.**B261** (1985) 379-431.  
**B. W. Lee, C. Quigg and H. Thacker**, “Weak interactions at very high energies: the role of the Higgs boson mass”, Phys. Rev.**D16** (1977) 1519-1531.  
 (+ **D11** (1975) 972 Erratum).  
**C. E. Vayonakis**, *Nuov. Cim. Lett.* **17** (1976) 383-387.
- [22] **G. ’t Hooft**, “Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills fields ”, Nucl.Phys.**B35** (1971) 167-188.
- [23] **J. S. Bell**, “High energy behavior of tree diagrams in gauge theories”, Nucl.Phys.**B60** (1973) 427-436.
- [24] **J. F. Gunion, H. E. Haber, G. L. Kane and S. Dawson**, *The Higgs Hunter’s Guide*, Addison-Wesley, (Frontiers in Physics) (1990).
- [25] **V. D. Barger, R. J. N. Phillips**, “Collider’s Physics” *Addison-Weysley*, 1987 (Frontiers in Physics).
- [26] **C. S. Wu et al.**, “Experimental test of parity conservation in beta decay”, Phys.Rev.**105** (1957) p1413-1414.
- [27] **C. N. Yang, T. D. Lee**, “Parity nonconservation and two-component theory of the neutrino”, Phys.Rev.**105** (1957) 1671-1675.
- [28] **R. P. Feynman, M. Gell-Mann**, “Theory of the Fermi interaction”, Phys.Rev.**109** (1957) 193-198.
- [29] **S. Weinberg**, “General Theory of Broken Local Symmetries”, Phys.Rev.**D4** (1973) 1068-1082.

- [30] **G. J. Gounaris, R. Kögerler and H. Neufeld**, “Relationship between longitudinally polarized vector bosons and their unphysical scalar partners”, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 3257-3259.
- [31] **S. I. Eidelman, E. A. Kuraev**, “ $e^+e^-$  annihilation into two and three photons at high energy”, *Nucl. Phys.* **B143** (1978) 353-364.
- [32] **M. L. Laursen, K. O. Mikaelian, M. A. Samuel**, “ $Z^0$  decay into three gluons”, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2795.
- [33] **F. M. Renard**, “Tests of composite models with  $Z^0$  decay modes”, *Phys. Lett.* **B116** (1982) 269-273.
- [34] **P. Q. Hung, J. J. Sakurai**, “ $\gamma - W^0$  mixing as an alternative to unified weak-electromagnetic gauge theories”, *Nucl. Phys.* **B143** (1978) 81-113.
- [35] **F. de Campos, S. M. Lietti, S. F. Novaes, R. Rosenfeld**, “Probing Higgs Couplings in  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ ”, *HEP-PH/9607241*.
- [36] **C. Bouchiat, L. Michel**, “Mesure de la polarisation des électrons relativistes”, *Nucl. Phys.* **5** (1958) 416-434.
- [37] **M. L. Mangano, S. J. Parke**, “Multipartons Amplitudes in Gauge theories”, *Phys. Rep.* **200** (1991) 301-367.
- [38] **A. de Rújula**, “Effects of virtual monopoles”, *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 257-276.
- [39] **M. Baillargeon, F. Boudjema**, “New Physics Through Final State Photons”, L.A.P.P. preprint, Feb. 92 (A-366/92) et CERN YELLOW BOOK “Workshop On Photon Radiation From Quarks”, CERN 92-04, 2 juillet 1992 (ed. S. Cartwright).
- [40] **M. Baillargeon, F. Boudjema, E. Chopin, V. Lafage**, “New Physics with three-photon events at LEP”, *Z. Phys.* **C71** (1996) 431-442 (*HEP-PH/9506396*).

- [41] **I.A. Ajwa, Z. Liu, P. S. Wang**, “Gröbner Bases Algorithm”, ICM Technical Reports Series **ICM-199502-00** (1995), see the internet server <http://SymbolicNet.mcs.kent.edu/areas/groebner/index.html>.
- [42] **A. Acciari et al. (L3 collaboration)**, “Tests of QED at LEP energies using  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma(\gamma)$  and  $e^+e^- \rightarrow l^+l^-\gamma\gamma$ ”, Phys.Lett.**B353** (1995) 136-144.
- [43] **G. Alexander et al. (OPAL collaboration)**, “Measurements with photonic events in  $e^+e^-$  collisions at centre-of-mass energies of 130-140 GeV”, Phys.Lett.**B377** (1996) 222-234.
- [44] **D. A. Kosower**, “Color factorization for fermionic amplitudes”, Nucl.Phys.**B315** (1989) 391-418.
- [45] **Z. Bern**, “String-based perturbative methods for gauge theories”, *HEP-PH/9304249* Lecture given at the Theoretical Advanced Summer Institute (TASI) 1992, Boulder, CO.
- [46] **G. 't Hooft, M. Veltman**, “Combinatorics of gauge fields”, Nucl.Phys.**B50** (1972) 318-353.
- [47] **K. Fujikawa, B. W. Lee, A. I. Sanda**, “Generalized Renormalizable Gauge Formulation of Spontaneously broken gauge theories”, Phys.Rev.**D6** (1972) 2923-2943.
- [48] **M. B. Gavela, G. Girardi, C. Malleville and P. Sorba**, “A Non-Linear  $R_\xi$  Gauge Condition For The Electroweak  $SU(2) \times U(1)$  Model”, Nucl.Phys.**B193** (1981) 257-268.  
**G. Girardi, C. Malleville and P. Sorba**, “General treatment of the non-linear  $R_\xi$  gauge condition”, Phys.Lett.**B117** (1982) 64-68.
- [49] **M. Bace and N. D. Hari Dass**, *Ann. Phys.* **94** (1975) 349.  
**N. G. Deshpande and M. Nazerimonfared**, “Flavor-changing electromagnetic vertex in a non-linear  $R_\xi$  gauge”, Nucl.Phys.**B213** (1983) 390-408.  
**F. Boudjema**, “The scattering of light by light in the non-linear gauge”, Phys.Lett.**B187** (1987) 362.

- [50] **L. F. Abbott**, “The Background Field Method Beyond One Loop”, Nucl.Phys.**B185** (1981) 189-203.
- [51] **G. Shore**, “Symmetry restoration and the Background Field Method in gauge theories”, *Ann. Phys.* **137** (1981) 262-305.
- [52] **S. Coleman, E. Weinberg**, “Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking”, Phys.Rev.**D7** (1973) 1888-1910.
- [53] **A. Denner, S. Dittmaier, G. Weiglein**, “Application of the Background Field Method to the electroweak standard model”, Nucl.Phys.**B440** (1995) 95-128.
- [54] **M. B. Einhorn and J. Wudka**, “Screening of heavy Higgs-bosons radiative effects”, Phys.Rev.**D39** (1989) 2758-2763.
- [55] **J. Papavassiliou and K. Philippides**, “Gauge invariant three boson vertices and their Ward identities in the Standard Model”, *HEP-PH/9503377*.  
**J. Papavassiliou** , Phys.Rev.**D51** (1995) 856-851.  
**G. Degrassi and A. Sirlin**, “Gauge dependence of basic electroweak corrections of the Standard Model”, Nucl.Phys.**B383** (1992) 73-92.  
**G. Degrassi and A. Sirlin**, “Gauge invariant self-energies and vertex parts”, Phys.Rev.**D46** (1992) 3104-3116.  
**G. Degrassi and A. Sirlin**, “Renormalizable W self energy in the unitary gauge via the Pinch Technique”, Phys.Rev.**D50** (1994) 5951-5957.  
**A. Denner, S. Dittmaier, G. Weiglein**, “Gauge invariance, gauge parameter independence and properties of Green’s functions”, *HEP-PH/9505271*.  
**K. Philippides**, “The Ward Identities of the gauge invariant three bosons vertices”, *HEP-PH/9504383*.  
**S. Hashimoto et al.**, “The Background Field Method: alternative way of deriving the Pinch Technique’s results”, Phys.Rev.**D50** (1994) 7066-7076.  
**N. J. Watson**, “Universality of the Pinch Technique gauge bosons self-energies”, *HEP-PH/9412319*, Phys.Lett.**B349** (1995), 155-164.



- [56] **Chan Hong-Mo, J. E. Paton**, “Generalized Veneziano model with isospin”, Nucl. Phys. **B10** (1969) 516-520.
- [57] **Z. Xu, D. Zhang, L. Chang**, “Helicity amplitudes for multiple bremsstrahlung in massless non-abelian gauge theories”, Nucl. Phys. **B291** (1987) 392-428.
- [58] **J. L. Gervais, A. Neveu**, “Feynman rules for massive gauge fields with dual diagram topology”, Nucl. Phys. **B46** (1972) 381-401.
- [59] **D. A. Kosower, B. H. Lee, V. P. Nair**, “Multi-gluon scattering: a string based calculation”, Phys. Lett. **B201** (1988) 85-89.
- [60] **F. A. Berends, W. T. Giele**, “Recursive calculations for processes with  $n$  gluons”, Nucl. Phys. **B306** (1988) 759-808.
- [61] **T. Regge**, “Introduction to complex orbital momenta”, Nuovo Cimento **14** (1959) 951-976; “Bound states, shadow states and Mandelstam representation”, Nuovo Cimento **18** (1960) 947-956.
- [62] **M. Kaku**, “Introduction to superstrings”, *Springer-Verlag N.Y.* (1988).
- [63] **M. A. Virasoro**, “Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models”, Phys. Rev. **D1** (1970) 2933-2936.  
**K. Kikkawa, B. Sakita, M. A. Virasoro**, “Feynman-like diagrams compatible with duality I. Planar diagrams”, Phys. Rev. **184** (1969) 1701-1713.  
**K. Kikkawa et al.**, “Feynman-like diagrams compatible with duality II. General discussion including nonplanar diagrams”, Phys. Rev. **D1** (1970) 3258-3266.
- [64] **Z. J. Koba, H. B. Nielsen**, “Manifestly crossing-invariant parametrization of  $n$ -meson amplitude”, Nucl. Phys. **B12** (1969) 517-536.  
“Reaction amplitude for  $n$ -mesons. A generalization of the Veneziano-Bardakçi-Ruegg-Virasoro model”, Nucl. Phys. **B10** (1969) 633-655.  
**G. Veneziano**, “Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories”, Nuovo Cimento **57A** (1968) 190-197.

- [65] **Y. J. Feng, C. S. Lam**, “Gauge cancellation for electroweak processes and the Gervais-Neveu gauge”, *HEP-PH/9608219*.
- [66] **F. Boudjema, E. Chopin**, “Double Higgs production at the Linear Colliders and the probing of the Higgs self-coupling”, à paraître dans *Z.Phys.* (*HEP-PH/9507396*).
- [67] **E. Chopin**, talk given at the 2nd European Workshop on *Physics with  $e^+e^-$  Linear Colliders*, Higgs Session, Assergi, Gran-Sasso, Italy, June 2<sup>nd</sup>, 1995. See Proceedings.
- [68] **A. Djouadi et al.**, “Higgs Particles”, proceedings of the workshop Annecy-Gran Sasso- Hamburg 1995 (*HEP-PH/9605437*).
- [69] **K. Cheung**, “Possibility of studying electroweak symmetry breaking at  $\gamma\gamma$  colliders”, *Phys. Lett.* **B323** (1994) 85-89.
- [70] **I. F. Ginzburg et al.**, “Colliding  $ge$  and  $gg$  beams based on the single-pass  $e^\pm e^-$  colliders”, *Nucl. Instrum. Meth.* **205** (1983) 47-68.  
**I. F. Ginzburg et al.**, “Colliding  $\gamma e$  and  $\gamma\gamma$  beams based on single-pass  $e^+e^-$  accelerators II. Polarization effects, monochromatization improvement”, *Nucl. Instrum. Meth.* **219** (1984) 5-24.  
**V. I. Telnov**, “Problems in obtaining  $\gamma\gamma$  and  $\gamma e$  colliding beams at linear colliders”, *Nucl. Instrum. Meth.* **A294** (1990) 72-92.  
**V. I. Telnov**, “ $\gamma\gamma$ ,  $\gamma e$  beams at Linear Colliders”, in Proceedings of “Physics and Experiments with Linear Colliders”, p. 739, Saariselkä, edited by R. Orava, P. Eerola and M. Nordberg, Sept. 10-14 1991.  
**V. I. Telnov** in “Proceedings of the IXth International Workshop on Photon-Photon Collisions”, p. 369, edited by D.O. Caldwell and H.P. Paar, World Scientific, 1992.
- [71] **H. A. Tolhoek**, “Electron polarization, theory and experiment”, *Rev. Mod. Phys.* **28** (1956) 277-298.

- [72] **F. Boudjema, F. M. Renard** “Tests of Alternative Models at a 500 GeV NLC”, *Preprint LAPP ENSLAPP-A-365/92* et dans “ $e^+e^-$  Collisions at 500 GeV, the Physics Potential”, *ed P. Zerwas*, DESY, Hambourg 1992.
- [73] **M. Baillargeon, G. Bélanger and F. Boudjema**, in *Proceedings of Two-Photon Physics from DAΦNE to LEP200 and Beyond*, Paris, 1994, edited by F. Kapusta and J. Parisi (world Scientific, Singapore, 1995),p.267. Voir aussi ENSLAPP-A-473/94 et *HEP-PH/9405359*.
- [74] **D. Babusci, G. Giordano, G. Matone**, “Photon polarization properties in laser backscattering”, *Phys. Lett.* **B355** (1995) 1-8.
- [75] **M. Baillargeon and F. Boudjema**, “Higgs or neutral vector boson production with a  $W$  pair in  $\gamma\gamma$  collisions”, *Phys. Lett.* **B317** (1993) 371-380.
- [76] **E. E. Boos et al.**, “CompHEP, specialized package for automatic calculations of elementary particle decays and collisions”, *HEP-PH/9503280*.
- [77] **G. P. Lepage**, “A new algorithm for adaptative multidimensional integration”, *J. Comp. Phys.* **27** (1978) 192-203.
- [78] **G. V. Jikia and Y. F. Pirogov**, “Studying Triple-Higgs Vertex in the process  $\gamma\gamma \rightarrow HH$  at TeV Energies”, *Phys. Lett.* **B283** (1992) 135-141.  
**G. V. Jikia**, “Higgs boson pair production in high energy photon-photon collisions”, *Nucl. Phys.* **B412** (1994) 57-75.
- [79] **J. C. Collins**, “Fragmentation of transversely polarized quarks probed in transverse momentum distributions”, *Nucl. Phys.* **B396** (1993) 161-182.
- [80] **X. Artru, M. Mekhfi**, “Transversely polarized parton densities, their evolution and their measurement”, *Z. Phys.* **C45** (1990) 669-676.
- [81] **V. A. Ilyin et al.**, “Probing the  $H^3$  vertex in  $e^+e^-$ ,  $\gamma e$  and  $\gamma\gamma$  collisions for light and intermediate Higgs boson”, June 1995, KEK CP-030, *HEP-PH/9506326*.

- [82] **A. Djouadi, H. E. Haber, P. M. Zerwas**, “Multiple production of MSSM neutral Higgs boson at high energy  $e^+e^-$  colliders”, *HEP-PH/9602234*.
- [83] **M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, N. M. Kroll, F. E. Low**, “Amelioration of divergence difficulties in the theory of weak interactions”, *Phys. Rev.* **179** (1969) 1518-1527.
- [84] **G. Altarelli and G. Parisi**, “Asymptotic freedom in parton language”, *Nucl. Phys.* **B126** (1977) 298-318.
- [85] **S. Dawson**, “The effective  $W$  approximation”, *Nucl. Phys.* **B249** (1984) 42-60.
- [86] **G. L. Kane, W. W. Repko and W. B. Rolnick**, “The effective  $W^\pm, Z^0$  approximation for high energy collisions”, *Phys. Lett.* **B148** (1984) 367-372.
- [87] **W. B. Rolnick**, “An extended parton model for the effective  $W$  and  $Z$  approximation”, *Nucl. Phys.* **B274** (1986) 171-182.
- [88] **M. Capdequi et al.**, “ $WW$  collisions from polarized electron or proton beams, polarized luminosities and applications”, *Z. Phys.* **C41** (1988) 99-119.
- [89] **F. M. Renard**, “Basics of electron-positron collisions”, ed. *Frontières* (1981).
- [90] **I. Kuss, H. Spiesberger**, “Luminosities for vector-boson-vector-boson scattering at high energy colliders”, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 6078-6093.
- [91] **R. Kleiss and W. J. Stirling**, “Anomalous high-energy behavior in boson fusion”, *Phys. Lett.* **B182** (1986) 75-82.
- [92] **K. Hagiwara et al.**, “Single weak boson production at TeV  $e^+e^-$  colliders”, *Nucl. Phys.* **B365** (1991) 544-596.
- [93] **V.M. Budnev et al.**, “The two-photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation.”, *Phys. Rep.* **15** (1975) 183-282.

- [94] **V. N. Baier, V. S. Fadin, V. A. Khoze, E. A. Kuraev**, “Inelastic processes in high energy quantum electrodynamics”, *Phys.Rep.* **78** (1981) 293-393.
- [95] **Y. L. Dokshitzer, D. I. Dyakonov and S. I. Troïan**, “Hard processes in Quantum Chromodynamics”, *Phys.Rep.* **58** (1980) 269-395.
- [96] **K. Hagiwara, I. Watanabe, P. M. Zerwas**, “Higgs boson production in  $e\gamma$  collisions”, *Phys.Lett.* **B278** (1992) 187-192.
- [97] **S. Chanowitz and M. K. Gaillard**, “Multiple production of W and Z as a signal of new strong interactions”, *Phys.Lett.* **B142** (1984) 85-90.
- [98] **R. N. Cahn and S. Dawson**, “Production of very massive Higgs Boson”, *Phys.Lett.* **B136** (1984) 196-200.  
 Ce papier expose des résultats phénoménologiques et quelques notations. Les calculs plus détaillés, en particulier sur l’espace de phase sont dans **R. N. Cahn**, “Production of heavy Higgs bosons: comparisons of exact and approximate results”, *Nucl.Phys.* **B255** (1985) 341-354.
- [99] **I. Kuss**, “Improved effective vector boson approximation for hadron-hadron collisions”, *HEP-PH/9608453*.
- [100] **V. Lafage**, “Etats à plusieurs particules dans les futurs collisionneurs  $e^+e^-$  et  $\gamma\gamma$ : techniques de calcul et effet d’une Nouvelle Physique”, Thèse de doctorat, 22 oct. 1996 (Paris XI - ENSLAPP).
- [101] **S. Weinberg**, “Physical Processes in a Convergent Theory of the Weak and Electromagnetic Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 1688-1691.
- [102] **E. C. G. Stueckelberg**, “Théorie de la radiation de photons de masse arbitrairement petite”, *Helv. Phys. Acta* **30** (1956) 209-215.
- [103] **S. Coleman, J. Wess, B. Zumino**, “Structure of Phenomenological Lagrangians I.”, *Phys.Rev.* **177** (1969) 2239-2247.

- C. G. Callan Jr, S. Coleman, J. Wess, B. Zumino**, “Structure of Phenomenological Lagrangians II.”, Phys.Rev. **177** (1969) 2247-2250.
- [104] **D. A. Dicus, K. J. Kallianpur, S. S. D. Willenbrock**, “Higgs boson pair production in the effective-W approximation”, Phys.Lett. **B200** (1988) 187-192.
- A. Abbasabadi, W. W. Repko, D. A. Dicus and R. Vega**, “Comparison of exact and effective-gauge-boson calculations for gauge-boson fusion processes”, Phys.Rev. **D38** (1988) 2770-2775.
- K. J. Kallianpur**, “Pair-production of Higgs bosons via heavy quark annihilation”, Phys.Lett. **B215** (1988) 392-396.
- [105] **E. Byckling, K. Kajantie**, “Particle kinematics”, Wiley Interscience, 1973.
- [106] **R. Vega, J. Wudka**, “A covariant method for calculating helicity amplitudes”, *HEP-PH/9511318*.
- [107] **K. Hagiwara, D. Zeppenfeld**, “Helicity amplitudes for heavy lepton production in  $e^+e^-$  annihilations”, Nucl.Phys. **B274** (1986) 1-32.
- [108] **I. M. Benn, R. W. Tucker**, “An introduction to spinors and geometry with applications in physics”, Adam Hilger ed., Bristol & Philadelphia (1987).
- [109] **E. Wigner**, “On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group”, Ann. Math. **40** (1939) 149-204.
- [110] **P. Moussa, R. Stora**, “Angular Analysis of Elementary Particle Reactions” in “Methods in Subnuclear Physics”, Herceg-Novi Summer School (1966) p265. (*Gordon & Breach*).
- [111] **S. Weinberg**, “The Quantum Theory of Fields, vol1: foundations”, (1995) *Cambridge Univ. Press*.
- [112] **A. G. Morgan**, “Second order fermions in gauge theories”. Phys.Lett. **B351** (1995) 249-256 (*HEP-PH/9502230*).

- [113] **S. Weinberg**, “Photons and Gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and Equality of gravitational and inertial mass”, Phys.Rev. **135** (1964) B1049-1056.
- [114] **Y. Aharonov, D. Bohm**, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, Phys. Rev. **115** (1959) 485-491.
- [115] **R. G. Chambers**, “Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux”, Phys. Rev. Lett. **5** (1960) 3-5.  
**H. Boersch et al.**, “Antiparallele weiche bereiche als biprisma für elektroneninterferenzen”, Z. Phys. **159** (1960) 397-404.  
**W. Bayth**, “Messung der kontinuierlichen phasenschiebung von elektronenwellen im kraftfeldfreien raum durch das magnetische vektorpotential einer Wolfram-Wendel”, Z. Phys. **169** (1962) 492-510.  
**R. C. Jaklevic et al.**, “Macroscopic quantum interferences in superconductors”, Phys. Rev. **140** (1965) A1628-1637.
- [116] **M. B. Halpern**, “Field-strength formulation of quantum chromodynamics”, Phys. Rev. **D16** (1977) 1798-1801.
- [117] **K. Seo, M. Okawa**, “Field strength description of non-abelian gauge theories”, Phys. Rev. **D21** (1980) 1614-1619.
- [118] **S. Mandelstam**, “Vortices and quark confinement in non-abelian gauge theories”, Phys. Rep. **23C** (1976) 245-249 and Phys. Lett. **B53** (1975) 476-478.
- [119] **E. Mendel, L. Durand**, “Field-strength formulation of gauge theories. The Hamiltonian approach in the abelian theory”, Phys. Rev. **D30** (1984) 1754-1762.
- [120] **L. D. Faddeev, V. N. Popov**, Phys. Lett. **B25** (1967) 29.
- [121] **C. Becchi, A. Rouet, R. Stora**, Com. Math. Phys. **42** (1975) 127.
- [122] **L. Baulieu**, “Perturbative gauge theories”, Phys. Rep. **129** (1985) 1-74.